



A Descriptive Study of Conceptual Structures and Image Schemas Corresponding to Algebra Based on Cognitive Semantics

Nasser Hafezi-Motlagh¹, Mohammadreza Pahlavannezhad² and Mohsen Kahani³

1. Ph.D. Student of Cognitive Linguistics, Department of Linguistics, Faculty of Letters and Humanities, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran. E-mail: n_hafezi@um.ac.ir
2. Corresponding Author, Professor of Linguistics, Department of Linguistics, Faculty of Letters and Humanities, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran. E-mail: pahlavan@um.ac.ir
3. Professor of Computer Engineering, Department of Computer Engineering, Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran. E-mail: kahani@um.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history

Received: 12 Mar 2025

Received in revised form: 23 July 2025

Accepted: 31 July 2025

Published online: 23 Sep 2026

Keywords:

automatic author gender identification,
gender tagged corpus,
ParseBert model,
speech gender differences,
text embedding

ABSTRACT

According to the hypothesis of embodied mathematics, the basis and origin of mathematics is the human-being embodiment, and therefore mathematical Platonism and similar hypotheses, which assume the existence of mathematics independent of man, can only have a place of faith and not science. Based on this hypothesis, and since mathematics and its branches such as algebra are also the output of the system of thought and human cognition, they must be describable on the basis of basic conceptual structures such as the image schemas, the conceptual metaphors, the conceptual metonymy, and the conceptual blending. therefore, in this research, based on the descriptive-analytical method and the hypothesis of embodied mathematics, the fundamental metonymy of algebra and its role in the formation of mathematical concepts are discussed, and the cognitive origin of various branches of algebra such as identities, algebraic equations and inequalities, locus, the idea of analytic geometry, vector algebra and algebra of sets are analyzed based on a cognitive perspective. The mathematical generalization of the conceptual structures based on the algebraic foundation is the generator of effective branches in other experimental and analytical sciences. Since, according to the embodied mathematics hypothesis, mathematics, like language, is derived from the human thought system and cognitive faculties, it is possible to describe basic algebraic concepts based on conceptual structures such as metonymy, metaphor and conceptual blending, and this result can be used to optimize mathematics education.

Cite this article: Hafez-Motlagh, N., Pahlavannezhad, M., & Kahani, M. (2026). A descriptive study of conceptual structures and image schemas corresponding to algebra based on cognitive semantics. *Research in Western Iranian Languages and Dialects*, 14(3), 59–79. <http://doi.org/10.22126/jlw.2025.11917.1824> (in Persian).



© The Author(s).

DOI: <https://doi.org/10.22126/jlw.2025.11917.1824>

Publisher: Razi University

Introduction

The word algebra in Arabic means unification and linking of broken parts, and is also used in the sense of necessity and as the opposite of option (Dehkhoda Dictionary). Similarly, the word jabbar means both bone-setter and tyrant. This word, following the great work of Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi in the third century AH called *Jabr va Moghabeleh* (full name: *Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-jabr wa al-mughabaleh*), caused a branch of mathematics in Europe to later be called Algebra, and the name of al-Khwarizmi himself remained in the mathematics in the form of the word algorithm. Al-Khwarizmi used the words Jabr and Moghabeleh to describe the transposition of positive and negative terms on both sides of an equation and the elimination of equations from both sides. In simpler terms, algebra means transferring a negative expression from one side of an equation to the other and transforming it into a positive expression (algebra), and Moghabeleh means eliminating similar expressions from both sides of the equation. Al-Khwarizmi used linguistic descriptions instead of symbols to describe algebraic expressions. Today's mathematical symbols and notation have been formed through a long and evolutionary process. Today, algebra encompasses a much larger scope of mathematical knowledge and has numerous branches.

The hypothesis of embodied mathematics, presented by Lakoff and Núñez, attempts to identify the origin of mathematics and its place in human cognitive faculties. Since, according to this hypothesis, mathematics as we know it is not a transcendent and external thing, but an embodied thing, traces of conceptual structures as discussed in cognitive sciences and cognitive linguistics can be observed in it. Therefore, the role of structures that affect the conceptualization system, including image schemas, metonymy, metaphors, and conceptual blending, is also prominent in embodied mathematics. This research describes some of the basic concepts of algebra as a branch of mathematics from the perspective of cognitive semantics and the hypothesis of embodied mathematics. From the perspective of Lakoff and Núñez, algebra has a kind of metonymy (whole for part), which they called the fundamental metonymy of algebra. This research describes algebraic concepts based on the fundamental metonymy of algebra and conceptual structures derived from human cognitive faculties, based on the perspective of embodied mathematics, which itself stems from the second generation of cognitive sciences and within the framework of cognitive semantics.

Method

The method of this research is descriptive-analytical method based on language intuition and introspection-based viewpoint. The Algebraic concepts are used as research data.

Results

Algebra as a whole is a whole for part metonymy for other branches of mathematics like arithmetic and geometry. This metonymy is called fundamental metonymy of algebra. Based on this metonymy, basic algebraic concepts can be described and analyzed in the cognitive semantics framework. In this viewpoint, analytical geometry is a product of the metonymy generalization which extends the algebra from arithmetic as source domain of a metaphor toward the geometry as target domain of the same metaphor. The concept of locus is a metaphoric blend which integrates arithmetic and geometry in a two-conditional statement and algebra plays the role of a whole for part metonymy in this integration. Identities, Equations and inequalities can be described based on the container image schema and the relation between part and whole in the metonymy. Mathematical relations are kind of blending that integrates two or more sets and mathematical functions are conceptual metaphors which project a domain on a target. Vectors are product of motion perception based on the source-path-goal image schema, and sets, also the sets algebraic operations, are mathematical embodiment of container image schema and its different aspects.

Conclusion

The description of Algebra in the cognitive semantics framework and based on embodied mathematics hypothesis leads us to conclude some generalizations which extends algebra and algebraic concepts to other branches of science and these generalizations are foundations of new concepts and fields as mechanics, trigonometry, topology, vector space and etc. This viewpoint can be used in the mathematical educations and the increasing effect and efficiency of using cognitive semantics in the educational methods of algebra-learning can be tested.

Ethical Considerations

Not applicable

Funding

Not applicable

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest

بررسی توصیفی ساخت‌های مفهومی و طرح‌واره‌های تصویری متناظر با علم جبر برپایه معنانشناسی شناختی

ناصر حافظی مطلق^۱ | محمدرضا پهلوان‌نژاد^۲ | محسن کاهانی^۳

۱. دانشجوی دکتری علوم شناختی، گرایش زبان‌شناسی، گروه زبان‌شناسی، دانشکده ادبیات و علوم انسانی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران. رایانامه: n_hafezi@um.ac.ir

۲. نویسنده مسئول، استاد، گروه زبان‌شناسی، دانشکده ادبیات و علوم انسانی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران. رایانامه: pahlavan@um.ac.ir

۳. استاد، گروه مهندسی کامپیوتر، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران. رایانامه: kahani@um.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: پژوهشی	براساس فرضیه ریاضیات بدنمند، مبنا و خاستگاه ریاضیات، بدنمندی انسان است. از این رو، رویکردهای افلاطونی و فرض‌های مشابه که هستی ریاضیات را مستقل از انسان می‌انگارند، پایه علمی ندارند و تنها می‌توانند جایگاه ایمانی داشته باشند. با پذیرش این فرض که ریاضیات و شاخه‌های آن همچون جبر محصول نظام اندیشه و قوای شناختی انسان هستند، باید بتوان آن‌ها را بر مبنای ساخت‌های مفهومی بنیادین مانند طرح‌واره تصویری، مجاز مفهومی، استعاره مفهومی و آمیزه مفهومی تبیین کرد. به این ترتیب، در پژوهش حاضر بر مبنای روش توصیفی-تحلیلی و برپایه فرضیه ریاضیات بدنمند، مجاز بنیادین جبر و نقش آن در شکل‌دهی مفاهیم ریاضی بررسی شدند. در این زمینه، خاستگاه شناختی شاخه‌های گوناگون جبر مانند اتحادها، معادلات و نامعادلات جبری، مکان هندسی، ایده هندسه تحلیلی، جبر بردارها و جبر مجموعه‌ها تحلیل شدند و تعمیم طرح‌واره‌ای این مفاهیم در دیگر علوم و نمونه‌های زبانی متناظر ارائه شدند. از آنجاکه براساس فرضیه ریاضیات بدنمند، ریاضیات نیز مانند زبان بر نظام اندیشه و قوای شناختی انسان مبتنی است، تبیین مفاهیم پایه علم جبر بر مبنای ساخت‌های مفهومی مانند مجاز، استعاره و آمیزه مفهومی امکان‌پذیر است؛ بنابراین، چنین رویکردی می‌تواند در بهینه‌سازی آموزش ریاضیات به کار گرفته شود.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۲۲	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۵/۱	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۵/۹	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۷/۱	
کلیدواژه‌ها: ریاضیات بدنمند، مجاز مفهومی، استعاره مفهومی، آمیزه مفهومی، جبر	

استناد: حافظی مطلق، ناصر؛ پهلوان‌نژاد، محمدرضا؛ کاهانی، محسن (۱۴۰۵). بررسی توصیفی ساخت‌های مفهومی و طرح‌واره‌های تصویری متناظر با علم جبر برپایه معنانشناسی شناختی. *مطالعات زبان‌ها و گویش‌های غرب ایران*، ۱۴ (۳)، ۵۹-۷۹. <http://doi.org/10.22126/jlw.2025.11917.1824>

۱- مقدمه

واژه «جبر»^۱ در زبان عربی به معنای پیوند دادن اجزای شکسته و در تقابل با «اختیار»، به مفهوم «ضرورت» نیز به کار رفته است (دهخدا، ۱۴۰۵). همسو با این معنا، واژه «جَبَّار» در دو معنای متضاد «شکسته‌بند» و «زورگو و مستبد» استفاده می‌شود. پس از تألیف اثر سترگ ابوجعفر محمد بن موسی خوارزمی در سده سوم هجری قمری با عنوان *کتاب المختصر فی حساب الجبر و المقابله*، این واژه در اروپا به‌منزله شاخه‌ای از ریاضیات به نام Algebra تثبیت شد؛ چنان‌که نام خود خوارزمی (الخوارزمی) نیز به‌صورت واژه «الگوریتم»^۲ فراگیر شد (خوارزمی، ۱۹۸ ه.ق.). خوارزمی اصطلاحات «جبر» و «مقابله»^۳ را برای توصیف جابه‌جایی جملات مثبت و منفی در دو سوی یک معادله و حذف معادل‌ها از دو سمت به کار برده است. به‌بیان ساده‌تر، جبر به معنای انتقال عبارت منفی از یک طرف معادله به طرف دیگر و تبدیل آن به عبارتی مثبت (جبران) و مقابله به معنای حذف عبارات مشابه از دو طرف معادله است. درحالی‌که خوارزمی برای شرح عبارت‌های جبری به‌جای نمادها از توصیف‌های زبانی بهره برده است (خوارزمی، ۱۹۸ ه.ق.)، نمادهای ریاضی و نظام نمادگذاری امروزی در پی فرایندی طولانی و تکاملی شکل گرفته‌اند. امروزه جبر، گستره وسیعی از دانش ریاضیات را شامل می‌شود و شاخه‌های متعددی دارد (خوارزمی، ۱۹۸ ه.ق.).

فرضیه «ریاضیات بدنمند»^۴ که لیکاف و نونیس^۵ (۲۰۰۰) آن را مطرح کرده‌اند، بر شناسایی خاستگاه ریاضیات و جایگاه آن در قوای شناختی انسان متمرکز است. بر مبنای این فرضیه، ریاضیات نه امری «برون‌نگر»^۶ و بیرونی بلکه پدیده‌ای بدنمند و درونی است؛ ازاین‌رو، تجلی «ساخت‌های مفهومی»^۷ مورد بحث در علوم شناختی و زبان‌شناسی شناختی را می‌توان در آن بررسی کرد. به‌این‌ترتیب، نقش ساختارهای مؤثر بر نظام مفهوم‌سازی مانند «طرح‌واره‌های تصویری»^۸، «مجاز مفهومی»^۹، «استعاره مفهومی»^{۱۰} و «آمیزه‌های مفهومی»^{۱۱} در ریاضیات بدنمند نیز بنیادین است. در پژوهش حاضر، برپایه رویکرد «معناشناسی شناختی»^{۱۲} و باتکیه بر فرضیه ریاضیات بدنمند، به توصیف برخی از مفاهیم پایه جبر به‌مثابه شاخه‌ای از ریاضیات پرداخته می‌شود.

لیکاف و نونیس (۲۰۰۰) معتقدند جبر در قیاس با دیگر شاخه‌های ریاضیات، جایگاه ویژه مجاز «کل به‌جای جزء»^{۱۳} را دارد؛ مفهومی که آن‌ها آن را «مجاز بنیادین جبر»^{۱۴} نامیده‌اند (ص. ۷۴). در پژوهش پیش‌رو تلاش می‌شود تا باتکیه بر فرضیه ریاضیات بدنمند که خود از نسل دوم علوم شناختی و در چارچوب معناشناسی شناختی برخاسته است، مفاهیم جبری بر مبنای مجاز بنیادین جبر و ساخت‌های مفهومی حاصل از قوای شناختی انسان تبیین شوند.

پرسش اصلی پژوهش حاضر را می‌توان این‌گونه مطرح کرد: مفاهیم ریاضی در علم جبر و فرایند شکل‌گیری آن‌ها، باتکیه بر فرضیه ریاضیات بدنمند و بر مبنای بدنمندی، مجاز مفهومی، استعاره مفهومی و آمیزه مفهومی چگونه تبیین می‌شوند؟ این پرسش در تقابل با دیدگاه «ریاضیات افلاطونی»^{۱۵} قرار می‌گیرد؛ دیدگاهی که مفاهیم ریاضی را واقعیت‌هایی جهان‌شمول و مستقل از انسان می‌پندارد که نسبت انسان با آن‌ها فقط از جنس «کشف» است (لیکاف و نونیس، ۲۰۰۰: ۹۷). درمقابل، با پذیرش فرضیه ریاضیات بدنمند، که این مفاهیم را «پیشینی»^{۱۶} و هستی‌های ذهنی یا عینی از پیش موجود و مستقل از انسان نمی‌داند، این پرسش نیز مطرح می‌شود: توصیف شکل‌گیری و پیدایش مفاهیم ریاضی جبری بر مبنای بدنمندی و ساخت‌های مفهومی حاصل از آن، به‌ویژه در حوزه مجازهای بنیادین جبر، چگونه خواهد بود؟

1. algebra
2. algorithm
3. bbalancing
4. embodied mathematics
5. G. Lakoff & R. E. Núñez
6. objective
7. conceptual structures
8. image schemas
9. conceptual metonymy
10. conceptual metaphor
11. conceptual blendings
12. cognitive semantics
13. whole for part
14. fundamental metonymy of algebra
15. mathematical Platonism
16. a priori

۲- پیشینه پژوهش

افلاطون^۱، فیلسوف یونانی سده چهارم و پنجم پیش از میلاد، بر این باور بود که اشیای ریاضی، همچون اعداد و پدیده‌های هندسی به صورت غیرفیزیکی و مستقل از انسان موجود هستند؛ از این رو، وظیفه ریاضیات تنها کشف این حقایق پیشینی است (صال‌مصلحیان، ۱۳۸۴: ۱۱۰؛ لیویو^۲، ۲۰۱۰: ۲۱). به نظر می‌رسد این رویکرد افلاطونی متأثر از سنت فیثاغورسی^۳ باشد (لیویو، ۲۰۱۰: ۱۷)؛ مکتبی که برای مفاهیم ریاضی مانند اعداد جایگاهی متعالی قائل بود. فیثاغورس و پیروان او نوعی فرقه رازآمیز تشکیل دادند که محور اصلی آن اعتقاد به تقدس مفاهیم ریاضی، به ویژه اعداد، بود (ملودینو^۴، ۲۰۱۰: ۲۴-۲۵). نمود عینی این دیدگاه در رساله منون^۵ بازتاب یافته است؛ افلاطون در این رساله، گفت‌وگوی سقراط^۶ را با شخصی به نام منون شرح می‌دهد که در آن سقراط دانش را امری می‌داند که ما از پیش به آن آگاه هستیم و تنها باید آن را دوباره به یاد آوریم. سقراط با طرح پرسش‌هایی در حوزه ریاضیات از برده منون، هنگام گفت‌وگو با خود منون، برده ذکر شده را به سویی پاسخ‌های صحیح رهنمون می‌شود و نتیجه می‌گیرد که دانشی همچون ریاضیات به منزله دانشی از پیش موجود در ذهن ما وجود دارد (کرین^۷، ۲۰۲۵: ۲۰-۲۱). در تقابل با دیدگاه افلاطونی به ریاضیات، فرضیه ریاضیات بدنمند لیکاف و نونیس (۲۰۰۰) قرار دارد.

جرج لیکاف، زبان‌شناس شناختی، و رافائل نونیس، روان‌شناس شناختی، بر این باورند که ریاضیات پدیده‌ای بدنمند و برآمده از ادراک جسمانی انسان است (لیویو، ۲۰۱۰: ۸). فرضیه ریاضیات بدنمند در تقابل با دیدگاه‌های برون‌نگر همچون ریاضیات افلاطونی قرار می‌گیرد؛ دیدگاهی که بر پایه آن ریاضیات خارج از ذهن انسان موجود است و به مثابه واقعیت وجود دارد. لیکاف و نونیس (۲۰۰۰) این رویکرد را ریاضیات «رمانتیک»^۸ یا «افلاطونی»^۹ یا «متعالی»^{۱۰} می‌نامند که در نقطه متضاد با فرضیه آن‌ها قرار دارد. این نام‌گذاری از ایده افلاطونی مبنی بر ریاضیات به مثابه پلی میان واقعیت جهان و حواس گمراه‌کننده انسان نشئت گرفته است. به باور این پژوهشگران، فضای رمانتیک ریاضیات بر مجموعه‌ای از فرضیه‌ها بنا شده است؛ برای نمونه، ریاضیات امری انتزاعی و ناجسمانی اما حقیقی است؛ ریاضیات به منزله ساختاربخش این جهان و هر جهان ممکن دیگر وجودی عینی دارد؛ ریاضیات بخشی از عالم فیزیکی به شمار می‌آید (مقدمه، ص. ۱۵) در مقابل، بر پایه فرضیه ریاضیات بدنمند، ریاضیاتی که انسان آن را شناخته است ماهیتی ذهن‌بنیاد دارد و تنها از مسیر علوم شناختی دست‌یافتنی است و دسترسی به هر گونه ریاضیات متعالی و افلاطونی، اگر هم وجود داشته باشد، برای انسان ناممکن است. از این رو، چنین ریاضیاتی، برآمده از ادراک بدنمند است و از استعاره‌ها و آمیزه‌های مفهومی به منزله جزئی از ذات خود ریاضیات بهره می‌گیرد. به این ترتیب، حتی اگر ریاضیات متعالی و افلاطونی وجود داشته باشد، این ریاضیات بدنمند نمی‌تواند بخشی از آن محسوب شود (لیکاف و نونیس، ۲۰۰۰: ۳). به باور لیکاف و نونیس، ریاضیات بخشی از انسان بودن ما است و از بدن‌ها، مغزها و تجربه‌های زیسته روزمره ما برمی‌خیزد (لیویو، ۲۰۱۰: ۱۱۲).

لیکاف و نونیس (۲۰۰۰) برای تأیید فرضیه خود، مثال‌های متعددی را در حوزه‌های «حساب»^{۱۱}، «مجموعه‌ها»^{۱۲}، «جبر بولی»^{۱۳}، اعداد، «مفهوم بی‌نهایت»^{۱۴} و کاربرد ریاضیات در فیزیک بررسی می‌کنند. آن‌ها می‌کوشند باتکیه بر ساخت‌های مفهومی برآمده از قوای شناختی انسان، خاستگاه این مفاهیم را در بستر «بدنمندی انسان» تبیین کنند. این پژوهشگران در حوزه جبر، مفهوم «مجاز بنیادین جبر» را معرفی می‌کنند؛ مفهومی که امکان تعمیم حساب عینی به تفکر جبری عام را فراهم می‌کند (ص. ۷۴). این مجاز از نوع کل به جای جزء است که کل را به نیابت از جزء به کار می‌برد؛ به گونه‌ای که استفاده از عبارت‌های جبری را به مثابه یک کل به نیابت از اجزای حسابی به ما خواهد داد. مجموع این استعاره‌های حسابی و مجاز بنیادین جبر، تبیین‌گر سازگاری حساب با جهان است (لیکاف و

1. Plato
2. M. Livio
3. Pythagoras
4. L. Mlodinow
5. Meno
6. Socrates
7. T. Crane
8. romantic
9. transcendental
10. arithmetic
11. sets
12. Boolean algebra
13. the concept of infinity

نویس، ۲۰۰۰: ۹۶) و این پاسخی به پرسش ویگنر^۱ (۱۹۹۰) دربارهٔ اثربخشی ریاضیات بر علوم طبیعی است. لیکاف و نویس (۲۰۰۰) معتقدند که جبر با مفهوم فلسفی «جوهر» پیوند دارد؛ زیرا جبر نیز ماهیتی انتزاعی و جوهری دارد (ص. ۱۱۰). از این رو، «استعاره‌های جوهری جبر»^۲ امکان نگاشت ساختار جبری خاص بر یک نظام ریاضی خاص را فراهم می‌آورند (لیکاف و نویس، ۲۰۰۰: ۱۱۷). در این زمینه، لیکاف و نویس (۲۰۰۰) بر این باورند که ایده‌های بول^۳ در حوزهٔ جبر بولی برپایهٔ استعارهٔ «رابط رده‌ها به‌مثابهٔ ظرف‌ها»^۴ شکل گرفته است (ص. ۱۲۴).

در فرضیهٔ ریاضیات بدنمند، مفهوم بی‌نهایت نیز براساس «استعارهٔ پایهٔ بی‌نهایت»^۵ بنا شده است (لیکاف و نویس، ۲۰۰۰: ۱۵۸). براساس این استعاره، «بی‌نهایت واقعی»^۶ به‌صورت نگاشت یک فرایند درحال اجرا بر یک فرایند تکمیل‌شده مفهوم‌سازی می‌شود. برای نمونه، مجموعه‌های نامتناهی مانند مجموعهٔ «اعداد طبیعی»^۷، تجلی بی‌نهایت واقعی هستند. افزون‌براین، «بی‌نهایت بالقوه»^۸ در ریاضیات وجود دارد که در مواردی همچون ارقام اعشار جذر عدد دو یا افزایش اضلاع چندضلعی‌های منتظم مشاهده می‌شود (لیکاف و نویس، ۲۰۰۰: ۱۵۸).

لیکاف و نویس (۲۰۰۰) تأکید دارند فرضیهٔ ریاضیات بدنمند نوعی «پسانوگرایی»^۹ نیست و ریاضیات را نمی‌توان تنها یک دستاورد ساختگی تاریخی-فرهنگی دانست، بلکه برعکس، این فرضیه توانایی تبیین ویژگی‌های بنیادین و واقعی ریاضیات را فراهم می‌آورد؛ ویژگی‌هایی که «نسبی‌گرایی رادیکال»^{۱۰}، آن‌ها را انکار می‌کند یا نادیده می‌گیرد (ص. ۳۶۲). وورهیس^{۱۱} (۲۰۰۴) در نقد دیدگاه لیکاف و نویس استدلال می‌کند که حتی با پذیرش بدنمندی ریاضیات، نمی‌توان مدعی شد که انسان در دستیابی به ریاضیات متعالی ناتوان است. او این بحث را در پیوند با مقولهٔ «کوالیا»^{۱۲} در فلسفهٔ ذهن و مسئلهٔ «سخت آگاهی»^{۱۳} مطرح می‌کند. کوالیا که به کیفیات ذهنی اشاره دارد و در حوزهٔ «کیفیات ثانویه»^{۱۴} قرار می‌گیرد، حاصل نوعی تفسیر و ترجمهٔ ذهنی از واقعیات بیرونی است که مشخصه‌هایی مانند رنگ و بو را برای ما فراهم می‌آورد؛ مشخصه‌هایی که در ذات جهان خارج وجود ندارند و برساختهٔ ذهن و ادراک انسانی هستند.

وینتر و یوشیمی^{۱۵} (۲۰۲۰) فرضیهٔ لیکاف و نویس را از منظر «مابعدالطبیعه»^{۱۶} و «هستی‌شناسی»^{۱۷}، خنثی و از منظر «معرفت‌شناسی»^{۱۸}، بی‌نتیجه و نامعتبر می‌دانند. به‌باور آن‌ها، اگرچه استعاره‌های مفهومی رسانای^{۱۹} «تفکر انتزاعی»^{۲۰} هستند، عناصر بنیادین «سازنده»^{۲۱} آن نیستند. استدلال آن‌ها بر این پایه استوار است که چون تنها بخشی از نظریهٔ استعاره‌های مفهومی بر شواهد تجربی مبتنی است، نمی‌توان تمامیت آن را برآمده از تجربه در نظر گرفت؛ بنابراین، باید این نظریه را فقط ابزاری برای هدایت ذهنی در مفهوم‌سازی انتزاعی تلقی کرد و نباید این استعاره‌ها را به‌مثابهٔ مؤلفه‌ای بنیادین در ساختار تفکر ریاضی دانست. وینتر و یوشیمی ضمن پذیرش جنبهٔ بدنمندی در ادراک ریاضیات تأکید دارند که این امر به معنای استعاری‌بودن و بدنمندبودن خاستگاه و اساس ریاضیات نیست.

از آنجا که فرضیهٔ ریاضیات بدنمند همچنان نوپا است، خلأ توصیفی آن در حوزهٔ مفاهیم ریاضی مشهود است و بسط این نظریه به

1. E. P. Wigner
2. algebraic essence metaphors
3. G. Boole
4. classes as containers
5. basic metaphor of infinity
6. actual infinity
7. natural numbers
8. potential infinity
9. Post-Modernism
10. radical relativism
11. B. Voorhees
12. qualia
13. hard problem of consciousness
14. secondary qualities
15. B. Winter & J. Yoshimi
16. metaphysics
17. ontology
18. epistemology
19. conductive
20. abstract thought
21. constitutive

پژوهش‌های بیشتری نیاز دارد. در پژوهش حاضر، برخی از مفاهیم پایه ریاضی در علم جبر بر مبنای فرضیه ریاضیات بدنمند بررسی می‌شوند.

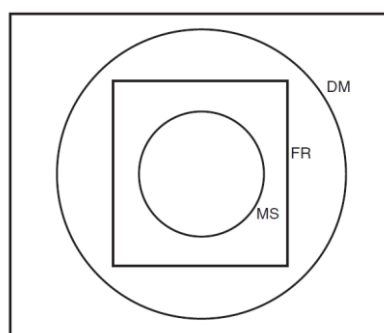
۳- ذهن بدنمند و ساخت‌های مفهومی

۳-۱ قالب‌های ذهنی

قالب مفهومی، بازنمودی ذهنی و ساختارمند از مقوله‌ای شناختی است (کووچش^۱، ۲۰۰۶: ۷۲). یکی از مشخصه‌های «قالب‌های ذهنی»^۲، درجه‌ای از انتزاع است که در چارچوب نظام اندیشه انسانی مدل‌سازی می‌شود؛ برای نمونه، مفاهیمی مانند «سده»، «سال» و «دهه» نوعی ذهنی‌سازی انتزاعی هستند. در طبیعت تنها توالی روشنایی و تاریکی بر اثر حرکت انتقالی زمین مشاهده می‌شود؛ اما این ذهن انسان است که این توالی را به شکل قالب‌های مفهومی و با صورت‌های زبانی سازمان‌دهی می‌کند. «قالب‌بندی»^۳، از منظر رویکردهای شناختی، فرایند انتخاب «شکل»^۴ مناسب از یک «زمینه»^۵ و برجسته‌سازی آن است. به بیان دیگر، قالب‌بندی بر گزینش وجوهی از یک واقعیت ادراکی و برجسته‌سازی آن‌ها در قالب ابزارهای ارتباطی دلالت دارد (انتمن^۶، ۱۹۹۳). به بیان ساده، قالب‌بندی، انتخاب و ارائه آگاهانه یا ناخودآگاه بخش‌هایی از یک واقعیت کلی است که با هدف ساخت یک چارچوب ذهنی خاص در ذهن مخاطب یا شنونده صورت می‌گیرد.

باتوجه به نقش محوری زبان در مقوله قالب‌بندی، ساخت‌های مفهومی در دو سطح لفظی و اصطلاحی نقشی تعیین‌کننده در این قالب‌بندی دارند؛ به گونه‌ای که به کارگیری نظام‌مند آن‌ها، تحقق اهداف مطلوب قالب‌بندی را آسان می‌کند. زبان لفظی به‌طور مستقیم بر فعال‌سازی و برانگیختن قالب‌های ذهنی اثر دارد و در ساخت قالب‌های نوین نیز مشارکت دارد. افزون‌براین، در زبان اصطلاحی، ساختارهایی مانند استعاره و مجاز، با بازسازی قالب‌های پیشینی و بازنمایی آن‌ها در قالبی جدید، فرایند قالب‌بندی را به‌طور مؤثری جهت‌دهی می‌کنند. مجاز نیز همانند استعاره در سطح گفتار و در دیگر ساختارهای بازنمودی مانند تصویر و آثار هنری، نقشی ویژه در قالب‌بندی ذهنی دارد (بنکرس^۷، ۲۰۰۸).

در سلسله‌مراتب انتزاع، پیش‌نمونه^۸ و طرح‌واره‌های تصویری انتزاعی‌ترین جایگاه را دارند؛ بنابراین، قالب‌های ذهنی که از بخش‌های انتزاعی‌تر برآمده‌اند. در مقایسه با آن‌ها عینی‌تر تلقی می‌شوند. به این ترتیب، قالب‌های ذهنی یا چارچوب‌های مفهومی از «ماتریس حوزه‌ها»^۹ عینی‌تر اما از فضا‌های ذهنی انتزاعی‌تر هستند (کووچش، ۲۰۲۰: ۵۵). همان‌طور که در شکل (۱) مشاهده می‌شود، سلسله‌مراتب انتزاع از طرح‌واره‌های تصویری (IS) آغاز و به فضا‌های ذهنی^{۱۰} (MS) ختم می‌شود که در این میان، ماتریس حوزه‌ها (DM) و قالب‌های ذهنی (FR) نیز در جایگاه‌های میانی قرار دارند (کووچش، ۲۰۲۰: ۵۲).



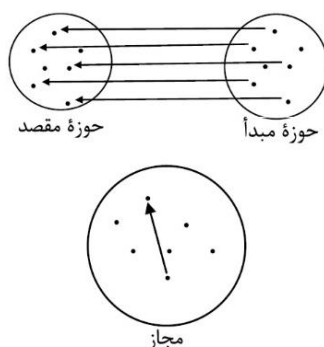
شکل (۱). سلسله‌مراتب انتزاع از طرح‌واره‌های تصویری تا فضا‌های ذهنی (کووچش، ۲۰۲۰: ۵۲)

1. Z. Kovacs
2. mental frames
3. framing
4. figure
5. ground
6. R. M. Entman
7. R. Benczes
8. prototypes
9. domain matrix (DM)
10. mental spaces

استعاره مفهومی در سطح قالب‌های ذهنی به معنای نگاشت یا «فرافکنی»^۱ سویه‌های یک قالب ذهنی بر قالب ذهنی دیگر است. استعاره‌های مفهومی نقشی بنیادین در مفهوم‌سازی حوزه‌های ریاضیات و هندسه دارند.

۳-۲ مجاز مفهومی

مجاز مفهومی، ساختاری است که در آن نگاشت از درون یک حوزه به درون همان حوزه صورت می‌گیرد (ایوانز، ۲۰۱۹: ۳۳۶). به بیان دیگر، مجاز شکلی از بازنمایی زبانی و فکری است که در آن، یک عنصر برای اشاره یا دسترسی به عنصری دیگر در همان حوزه به کار می‌رود که با آن پیوند دارد (لیتل مور، ۲۰۱۵: ۴). تفاوت بنیادین مجاز مفهومی و استعاره مفهومی در سازوکار نگاشت آن‌ها است؛ به این معنا که مجاز عنصری از یک حوزه را به عنصری دیگر در همان حوزه می‌نگارد؛ درحالی که استعاره نگاشتی از یک حوزه به حوزه دیگر است (ایوانز، ۲۰۱۹: ۳۳۶). البته برخی استعاره‌ها در مجاز ریشه دارند و بر اثر تفکیک حوزه‌هایی پدید آمده‌اند که مشترک بوده‌اند. در شکل (۲)، فرایند نگاشت در استعاره مفهومی و مجاز مفهومی با یکدیگر مقایسه شده‌اند (ایوانز، ۲۰۱۹: ۳۳۶). در این شکل، بخش بالایی با نمایش نگاشت از حوزه مبدأ به حوزه مقصد، فرایند شکل‌گیری استعاره مفهومی را نشان می‌دهد؛ درمقابل، بخش پایینی با نمایش نگاشت درون حوزه‌ای، چگونگی شکل‌گیری مجاز مفهومی را بازنمایی می‌کند.



شکل (۲). مقایسه فرایند نگاشت در استعاره مفهومی و مجاز مفهومی (ایوانز، ۲۰۱۹: ۳۳۶)

از آنجاکه مجاز نیز ساختی مفهومی است و از قوای شناختی عام انسان نشئت می‌گیرد، اثر آن نه تنها در زبان بلکه در دیگر برون داده‌های انسانی همچون فلسفه، ادبیات، نقاشی و موسیقی مشاهده می‌شود. برای نمونه، استفاده از «پرچم» به منزله نماد یک کشور یا بنایی مهم به منزله نماد یک شهر از مصادیق مجاز «جزء به جای کل»^۴ هستند.

طبق طبقه‌بندی ایوانز (۲۰۱۹)، اساسی‌ترین انواع مجاز مفهومی عبارت‌اند از: «مکان به جای نهاد»^۵، «سازنده به جای محصول»^۶، «مکان به جای رویداد»^۷، «جزء به جای کل»^۸، «کل به جای جزء» و «اثر (معلول) به جای علت»^۹ (ص. ۳۳۸). در ادامه، برای هریک از انواع مجاز مفهومی مثالی ذکر شده است.

مکان به جای نهاد: در جمله «کاخ سفید تصمیم به حمله گرفت»^۹، واژه «کاخ سفید» با کارکرد مجاز مکان برای اشاره به دولت ایالات متحده آمریکا به کار رفته است.

سازنده به جای محصول: در جمله «شکسپیر را از کتابخانه به من بدهید»^۹، واژه «شکسپیر» با کارکرد مجاز سازنده برای ارجاع به محصول فکری او یعنی «کتاب» به کار رفته است.

مکان به جای رویداد: در جمله «چرنوبیل همواره یادآور ترس از انرژی هسته‌ای است»^۹، واژه «چرنوبیل» با کارکرد مجاز مکان برای اشاره به حادثه هسته‌ای رخ داده در این منطقه به کار رفته است.

1. projection
2. V. Evans
3. J. Littlemore
4. part for whole
5. place for institution
6. producer for product
7. place for event
8. effect for cause

۹. نمونه‌های بدون ارجاع، براساس دانش زبانی نگارندگان این پژوهش تدوین شده‌اند.

جزء به جای کل: در جمله «پیراهن آبی آمد»، «پیراهن آبی» یعنی جزء با کارکرد مجاز از کل یعنی «شخصی که پیراهن آبی پوشیده» به کار رفته است.

کل به جای جزء: در جمله «آرژانتین قهرمان جام جهانی شد»، «کشور آرژانتین» یعنی کل با کارکرد مجاز از جزء یعنی «تیم فوتبال آن کشور» به کار رفته است.

اثر (معلول) به جای علت: در جمله «فصل برف است»، اثر یا معلول یعنی «برف» به جای علت یعنی «زمستان» به کار رفته است.

در فرضیه ریاضیات بدنمند، مجاز بنیادین جبر که در ادامه معرفی خواهد شد از نوع مجاز کل به جای جزء است. برای نمونه، در رابطه (۱) که نمونه‌ای از یک معادله درجه دوم است، پاسخ‌های معادله عبارت‌اند از: $x = 1$ و $x = 3$ در این رابطه، x با کارکرد مجاز کل به جای جزء برای اعداد ۱ و ۳ به کار رفته است.

$$\text{رابطه (۱): نمونه‌ای از یک معادله درجه دوم} \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

۳-۳ ریاضیات بدنمند، استعاره مفهومی و آمیزه مفهومی

استعاره‌های مفهومی که حاصل نگاشت یک حوزه مفهومی به حوزه مفهومی دیگر هستند (ایوانز، ۲۰۱۹: ۳۰۰)، در فرضیه ریاضیات بدنمند ریشه دارند. برای نمونه، نمایش نقاط روی خطوط هندسی، نوعی استعاره مفهومی است که براساس آن نقاط، متناظر با کمیت، روی خطوط هندسی مفهوم‌سازی می‌شوند. به بیان دیگر، در این نوع استعاره، «اعداد»، نقاطی روی خطوط هندسی هستند. محورهای مختصات که هریک نشان‌دهنده یک بُعد فیزیکی هستند در چارچوب همین استعاره جای می‌گیرند. به این ترتیب، هر بُعد فیزیکی به صورت استعاری با یک خط هندسی جهت‌دار مفهوم‌سازی می‌شود و هر نقطه روی آن، نگاشت استعاری یک عدد محسوب می‌شود. مثال دیگر، منطقی نمادی است که برپایه ماهیت استعاری خود، استدلال ریاضی را با نمادها مفهوم‌سازی می‌کند.

استعاره‌های مفهومی، بیشتر بر هم‌بستگی ناشی از ادراک بدنمند میان پدیده‌ها مبتنی هستند. با این حال، برپایه فرضیه ریاضیات بدنمند، نباید استعاره‌های برآمده از «مشابهت»^۱ را نادیده گرفت. لیکاف و نونیس (۲۰۰۰) استعاره‌های مورد استفاده در ریاضیات را به سه دسته زیر تقسیم می‌کنند:

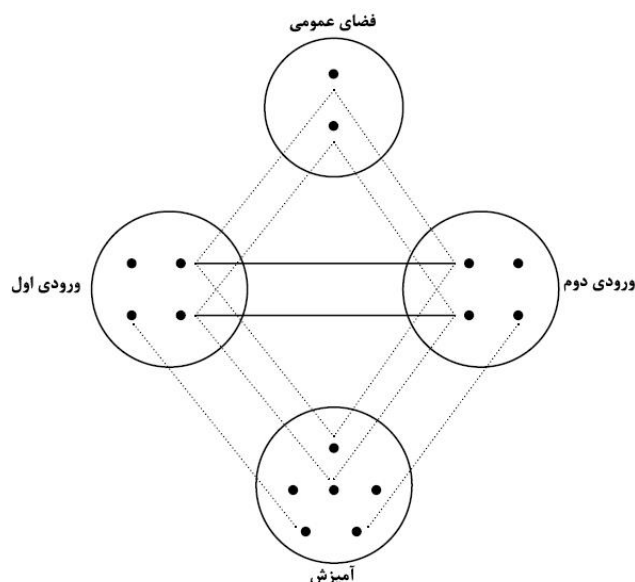
- «استعاره‌های پایه‌گذار»^۲: این استعاره‌ها با ایده‌های اساسی ریاضیات مانند جمع و تفریق مرتبط هستند.
- «استعاره‌های رابط»^۳: این دسته استعاره‌هایی را شامل می‌شود که به ایده‌های پیشرفته یا پیچیده مربوط می‌شوند؛ از این نوع استعاره‌ها می‌توان به «هندسه تحلیلی»^۴ و بیان مفاهیم هندسی به زبان جبری، استعاره اعداد به مثابه نقاطی روی یک خط و نمونه‌های مشابه اشاره کرد.
- «استعاره‌های بی‌ربط»^۵: این استعاره‌ها بیشتر براساس مشابهت بنا شده‌اند و با مبانی و ساختار درونی خود ریاضیات ارتباطی ندارند؛ تابع پله‌ای، مثالی از این دسته است (ص. ۵۳).

آمیزه مفهومی، ترکیبی از دو ساختار شناختی متفاوت است که میان آن‌ها تناظرهای ثابتی برقرار است. در فرایند «آمیزه»^۶، هستی‌های جدید پدید می‌آیند (لیکاف و نونیس، ۲۰۰۰: ۴۸)؛ به بیان دیگر، ویژگی‌های گزینشی دو مفهوم با یکدیگر ترکیب می‌شوند و مفهوم سوم را شکل می‌دهند (لانگاکر^۷، ۲۰۰۸: ۳۶).

در نظریه آمیزه مفهومی، ترکیب حوزه‌های گوناگون در فضای ذهنی، فرایندی پویاست که زیربنای «پدیدآیی»^۸ ساخت‌های مفهومی جدید در «فضای ذهنی برخط»^۹ محسوب می‌شود (ایوانز، ۲۰۱۹: ۵۳۰). شکل (۳) دیاگرام شبکه ترکیبی را در فرایند

1. resemblance
2. grounding metaphors
3. linking metaphors
4. analytic geometry
5. extraneous metaphors
6. blend
7. R. Langacker
8. emergence
9. on-line mental space

شکل‌گیری یک آمیزه مفهومی نشان می‌دهد (ایوانز، ۲۰۱۹: ۵۳۱). براساس این شکل، «فضای عمومی»^۱، ساخت‌های مفهومی پایه، انتزاعی و طرح‌واره‌ای را دربرمی‌گیرد که برای هر دو ورودی اول و دوم حالتی فراگیر دارد و ویژگی‌های هر دو را شامل می‌شود. درمقابل، در فضای آمیزه، مشخصه‌های دو ورودی به‌صورت پدیدآیی و در چارچوب مشخصات فضای عمومی آمیخته می‌شوند و آمیزه مفهومی را تشکیل می‌دهند.



شکل (۳). دیاگرام شبکه ترکیبی در شکل‌گیری آمیزه مفهومی (ایوانز، ۲۰۱۹: ۵۳۱)

ساختار آمیزه مفهومی در فرضیه ریاضیات بدنمند نیز مشاهده می‌شود. برای نمونه، در بخش نخست گزاره‌ای همچون معادله ریاضی $x = y$ خط راستی است که از مبدأ مختصات می‌گذرد و شیب آن یعنی نسبت عرض به طول هر نقطه از خط راست، برابر ۱ است. در این مثال، ورودی اول «خط راست»، ورودی دوم «مبدأ مختصات» و فضای عمومی، «معادله ریاضی» است. در فضای آمیزش، مفهومی جدید به‌صورت «پدیدآیی» به وجود می‌آید که این مفهوم جدید در بخش دوم گزاره یعنی شیب برابر با ۱ تجلی می‌یابد؛ حتی با حذف بخش دوم گزاره، پدیدآیی مفهوم آن همچنان از آمیزه مفهومی مذکور استنتاج‌پذیر است. اگر مشخصات و تناظرهای ثابت یک آمیزه مفهومی برخاسته از استعاره باشند، آن را «آمیزه استعاری مفهومی»^۲ می‌نامند. نمونه‌ای از این نوع، آمیزه «عدد-خط»^۳ در ریاضیات است که در آن، هر عدد ضمن دارا بودن ماهیت استعاری، متناظر با نقطه‌ای روی یک خط یا یک محور مختصات مفهوم‌سازی می‌شود (لیکاف و نویس، ۲۰۰۰: ۶۰).

در فرضیه ریاضیات بدنمند، آمیزه‌های مفهومی در دو سطح استعاری و غیراستعاری بسیار پرکاربرد هستند. براساس ادعای لیکاف و نویس (۲۰۰۰)، درک ریاضیات مستلزم تسلط بر آمیزه‌های مفهومی است و اساسی‌ترین ایده‌های ریاضی بیشتر از نوع آمیزه‌های مفهومی استعاری هستند (ص. ۴۸). یک نمونه بارز از این نوع آمیزه‌ها، «دایره واحد مثلثاتی»^۴ است که مرکز آن بر مبدأ مختصات قرار دارد و شعاع آن برابر با یک است. چنین دایره‌ای تنها یک شکل هندسی مدور نیست، بلکه به‌طور هم‌زمان ساختار جبری و عددی و مفاهیم مثلثاتی را بیان می‌کند.

۴- تحلیل داده‌ها

۴-۱ مجاز بنیادین جبر و هندسه تحلیلی

ازمنظر معناشناسی شناختی، از آنجاکه جبر دربرابر حساب نوعی مجاز «کل به‌جای جزء» محسوب می‌شود و ازسوی دیگر، حساب به‌منزله حوزه مبدأ امکان نگاشت استعاری بر هندسه به‌منزله حوزه مقصد را دارد، می‌توان نتیجه گرفت که جبر نیز به شکل تعمیمی،

1. generic space

2. conceptual metaphoric blending

3. number-line

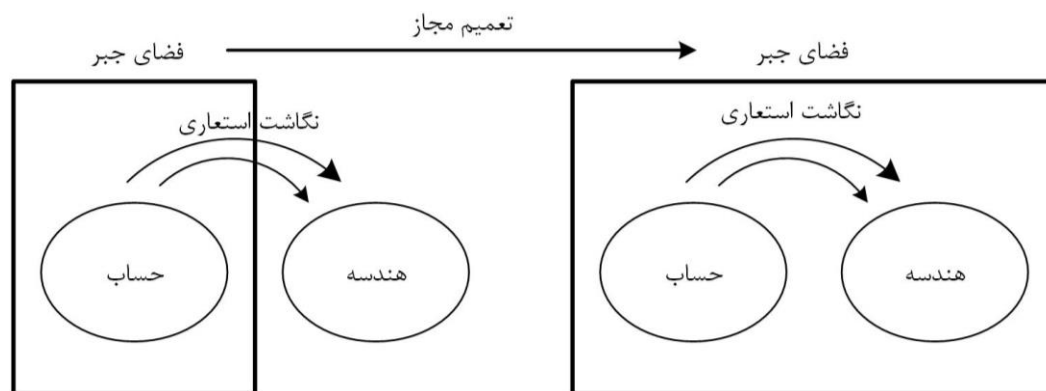
4. trigonometric unit circle

کارکرد مجاز کل به‌جای جزء را برای هندسه دارد. این تعمیم که دکارت^۱ آن را تحقق بخشید به پیدایش شاخه ریاضی جدیدی به نام «هندسه تحلیلی» منجر شد که ساختارهای هندسی را در قالب عبارتهای جبری توصیف می‌کند. بدیهی است که با پذیرش فرضیه ریاضیات بدنمند و قائل شدن به خاستگاه بدنمند مفاهیم ریاضی، می‌توان متناظر این مفاهیم را در دیگر برون داده‌های شناختی انسان مانند زبان گفتاری و نوشتاری نیز جست‌وجو کرد.

این نوع تعمیم مجازی در شکل‌گیری هندسه تحلیلی، در ساختارهای زبان گفتاری و نوشتاری نیز مشاهده می‌شود. برای نمونه، در استعاره‌های «عشق به مثابه موسیقی»^۲ و «عشق به مثابه رقص»^۳، از آنجاکه هنر می‌تواند در کارکرد مجاز کل به‌جای جزء برای موسیقی و رقص به کار رود، با تعمیم آن می‌توان هنر را مجازی برای عشق در نظر گرفت؛ مانند این بیت: «گر در سرت هوای وصال است حافظا/ باید که خاک در گه اهل هنر شوی» (حافظ، بی تا، غزل شماره ۴۸۷). از منظر ریاضی، رابطه (۲) توصیف کلی یک دایره به شعاع r را نشان می‌دهد.

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{رابطه (۲): معادله دایره به شعاع } r$$

در رابطه (۲)، دو متغیر x و y مجاز کل به‌جای جزء برای اعدادی هستند که در مختصات دایره‌ای به شعاع r صدق می‌کنند. به بیان دیگر، هریک از این دو متغیر همچون ظرفی عمل می‌کنند که برخی اجزای آن (اعداد)، پیرامون یک دایره هندسی قرار دارند. شکل (۴) طرح‌واره تصویری شکل‌گیری هندسه تحلیلی را بر مبنای مجاز بنیادین جبر و نگاشت استعاری حساب بر هندسه نشان می‌دهد. در این شکل چگونگی تعمیم مجاز بر حوزه مقصد در استعاره نمایش داده شده است.



شکل (۴). طرح‌واره شکل‌گیری هندسه تحلیلی بر مبنای مجاز بنیادین جبر و نگاشت استعاری حساب بر هندسه

۴-۲ مکان هندسی

استفاده از دو فضای ذهنی «حساب» و «هندسه» در فرایند «تلفیق»^۴ به ساخت آمیزه‌های مفهومی متعددی مانند مفهوم «مکان هندسی»^۵ منجر می‌شود که با بهره‌گیری از مجاز بنیادین جبر، قابلیت توصیف جبری می‌یابد. مکان هندسی یک آمیزه مفهومی استعاره‌ای است که به مجموعه‌ای از نقاط یک «مجموعه مرجع»^۶ اشاره دارد که همگی یک ویژگی مشترک دارند؛ به گونه‌ای که هر نقطه دیگری از مجموعه مرجع موردنظر که دارای آن ویژگی باشد، عضوی از این مکان هندسی محسوب می‌شود (گزاره دو شرطی). برای نمونه، رابطه (۲) که توصیف جبری دایره‌ای به شعاع r است، یک مکان هندسی را تعریف می‌کند. همه نقاط مجموعه مرجع موردنظر یعنی مجموعه نقاط یک صفحه که در رابطه (۲) صدق می‌کنند، عضوی از محیط دایره ذکر شده هستند و متقابلاً، هر نقطه‌ای از محیط دایره یادشده نیز در رابطه (۲) صدق می‌کند. بررسی معنای زبانی واژه Locus و مقایسه آن با مفهوم هندسی و ریاضی آن، گواهی بر نقش «بدنمندی» و «جسمانی‌بودن» در هر دو حوزه زبان و ریاضیات است؛ زیرا نشان می‌دهد چنین ساختاری در زبان گفتاری و نوشتاری نیز مشاهده می‌شود. پیوند میان مکان هندسی و زبان را می‌توان در این بیت مشاهده کرد: «جلوه‌گاه رخ او دیده من

1. R. Descartes
2. love as melody
3. love as dance
4. integration
5. locus
6. universal set

تنها نیست/ ماه و خورشید همین آینه می‌گردانند» (حافظ، بی‌تا، غزل شماره ۱۹۳). این شعر به زبان جبری، توصیف زبانی یک «مکان هندسی» از محصولات خلقت است؛ مکان‌هایی که آینه‌وار جلوه‌گاه رخ خالق هستند. به بیان دیگر، هر مخلوقی آینه صنع است؛ درمقابل، هر آینه صنعی مخلوق است (گزاره دو شرطی).

۴-۳ اتحاد، معادله و نامعادله

مجاز بنیادین جبر که برپایه مجاز «کل به جای جزء» استوار است، در فرایند مقایسه میان کل با اجزای آن، به زایش مفاهیم ویژه‌ای منجر می‌شود. اگر یک عبارت جبری برای همه اجزای مجموعه مرجع خود صادق باشد؛ به گونه‌ای که کل با همه اجزاء برابر شود، این عبارت را «اتحاد»^۱ می‌نامند. به بیان دیگر، اتحاد رابطه‌ای است که برای همه اجزای یک ظرف برقرار است (طرح‌واره تصویری ظرف)^۲. این ساختار در زبان گفتاری و نوشتاری نیز به وضوح مشاهده می‌شود؛ برای نمونه، «فریاد که در رهگذر آدم خاکی/ بس دانه فشاندند و بسی دام تنیدند» (فروغی بسطامی، بی‌تا، غزل شماره ۲۲۶). در این بیت، «آدم خاکی» به مثابه مقوله یا ظرفی است که برای همه اجزای آن (انسان‌ها)، مشابه یک اتحاد جبری، ویژگی «دانه‌فشاندن» و «دام‌تنیدن» برقرار است. یک نمونه از اتحاد جبری، اتحاد رابطه (۳) است که برای همه مقادیر x و y صدق می‌کند.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{رابطه (۳): اتحاد مربع دوجمله‌ای}$$

درمقابل، چنانچه یک عبارت جبری تنها برای برخی از اجزای مجموعه مرجع صادق باشد؛ به گونه‌ای که «کل» بزرگ‌تر از «اجزاء» باشد (طرح‌واره تصویری ظرف)، آن عبارت را «معادله»^۳ می‌نامند. این ساختار در ادبیات به منزله نمونه‌ای زبانی نیز تجلی دارد؛ مانند «هر که دلارام دید، از دلش آرام رفت» (سعدی، بی‌تا، غزل شماره ۱۴۱). این مصراع مشابه یک معادله جبری تنها برای اجزای خاصی، نه همه اجزاء، برقرار است؛ به بیان دیگر، زایش چنین مفاهیمی برآمده از ساخت‌های مفهومی انسانی است؛ بنابراین، نه تنها در ریاضیات بلکه در زبان گفتاری و نوشتاری و دیگر برون‌داده‌های برآمده از قوای شناختی انسانی نمود دارند. یک نمونه از معادله جبری، رابطه (۴)، موسوم به «معادله لجستیک»^۴ با کاربرد مطالعه تغییرات جمعیت گونه‌ها، است که طبق تعریف معادله جبری تنها برای برخی از مقادیر y برقرار است.

$$\frac{dy}{dt} = Ay(1-y) \quad \text{رابطه (۴): معادله لجستیک}$$

درنهایت، اگر یک عبارت جبری، «کل» را در وضعیتی از «نابرابری» با برخی از اجزای خود قرار دهد، عبارت موردنظر «نامعادله»^۵ نامیده می‌شود. در نامعادله، طرفین رابطه جبری در یک نامساوی قرار دارند. برای نمونه، در نامعادله رابطه (۵) این پرسش مطرح می‌شود: در مجموعه اعداد طبیعی (N)، مجموعه اعداد کوچک‌تر از ۳ کدام‌اند؟

$$x < 3, x \in N \quad \text{رابطه (۵): نامعادله اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳}$$

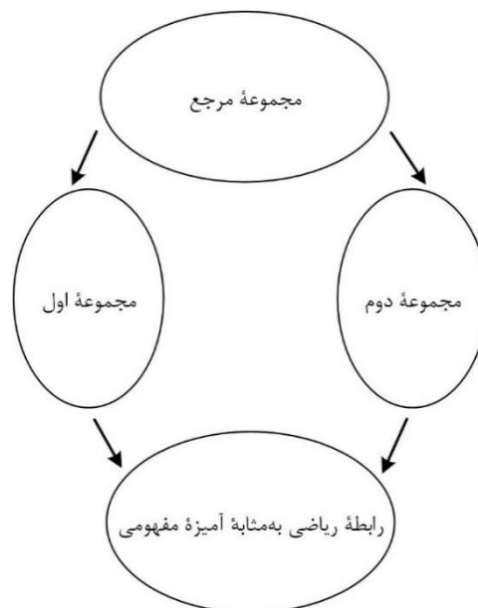
این نامعادله جبری در زبان نیز نمود دارد؛ مانند «هر که در این حلقه نیست، فارغ از این ماجرا است» (سعدی، بی‌تا، غزل شماره ۴۷). در این مصراع، مشابه یک نامعادله جبری، «کل» در وضعیتی از نابرابری با «اجزاء» (هر که در این حلقه نیست) قرار گرفته است.

۴-۴ رابطه ریاضی و تابع

در حالت کلی، مفهوم «رابطه»^۶ در ریاضیات یک آمیزه مفهومی است که دو فضای جبری را با یکدیگر ترکیب و به یک فضای سوم تبدیل می‌کند. «دوتایی‌های مرتب»^۷ که می‌توانند مختصات نقاط بر محور مختصات را نشان دهند، حاصل یک رابطه ریاضی هستند. شکل (۵) نشان‌دهنده رابطه ریاضی به مثابه یک آمیزه مفهومی دوجمله‌ای (دوتایی مرتب) است که به تعداد بیشتری از

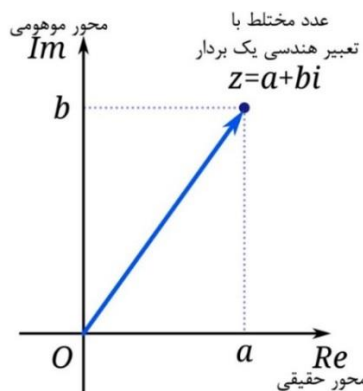
1. identity
2. container image schema
3. equation
4. logistic equation
5. inequality
6. relation
7. ordered pairs

مجموعه‌ها مانند سه‌تایی‌های مرتب و بیشتر نیز تعمیم‌پذیر است. این آمیزه‌های مفهومی پرکاربرد، در زبان نیز معادل‌هایی مشخص دارند؛ مانند «ابلیس پیروزمست» (شاملو، ۱۳۵۸).



شکل (۵). رابطه ریاضی به مثابه آمیزه مفهومی

باتوجه به مثال جبری شکل (۵)، مجموعه مرجع می‌تواند مجموعه «اعداد مختلط»^۱ باشد که از ترکیب دو مجموعه مرجع دیگر یعنی مجموعه اول شامل «اعداد حقیقی»^۲ و مجموعه دوم شامل «اعداد موهومی»^۳ حاصل شود. آمیزه مفهومی حاصل به مثابه یک رابطه ریاضی همان «عدد مختلط» است. تعبیر هندسی این آمیزه در مختصات دکارتی به صورت جفت‌شدن یک عدد حقیقی بر محور x و یک عدد موهومی بر محور y تجلی می‌یابد. نتیجه یعنی «عدد مختلط» حاصل را می‌توان جمع برداری دو عدد تشکیل‌دهنده به منزله یک بردار برآیند در نظر گرفت؛ همان گونه که در شکل (۶)، بردار حاصل و تعبیر هندسی عدد مختلط مذکور نمایش داده شده است.

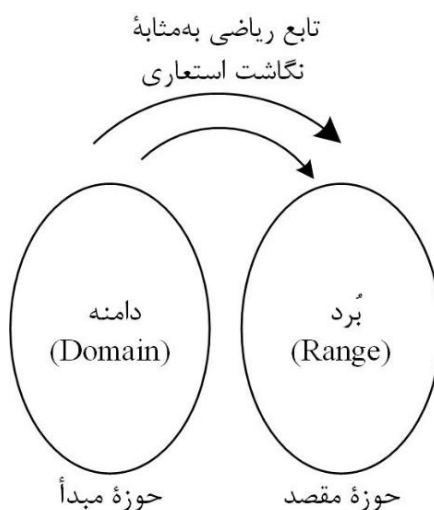


شکل (۶). عدد مختلط به مثابه حاصل یک رابطه ریاضی برآمده از آمیزه مفهومی

تابع^۴ در ریاضیات یک «نگاشت استعاری»^۵ است که حوزه مبدأ (دامنه)^۶ را بر حوزه مقصد (بُرد)^۷ تصویر می‌کند. از آنجاکه آمیزه مفهومی حوزه‌ای گسترده‌تر است که استعاره مفهومی و مجاز مفهومی را نیز در برمی‌گیرد، می‌توان استنتاج کرد که هر تابع، نوعی رابطه است؛ اما هر رابطه حتماً یک تابع نیست؛ این تمایز نه تنها از تعریف ریاضی این دو مفهوم بلکه از منظر معناشناسی شناختی تبیین‌پذیر است.

1. complex numbers
2. real numbers
3. imaginary numbers
4. function
5. metaphorical mapping
6. domain
7. range

است. طبق تعریف ریاضی، تابع رابطه‌ای است که در آن هیچ دو عضوی از آن، مؤلفه اول یکسان ندارند (هس^۱ و دیگران، ۲۰۱۸: ۲۱). شکل (۷) فرایند نگاشت از دامنه به بُرد را در یک تابع ریاضی نمایش می‌دهد. براساس این شکل، ماهیت استعاری تابع ریاضی استنتاج‌پذیر خواهد بود.



شکل (۷). نگاشت از دامنه به بُرد در یک تابع ریاضی و ساختار استعاری آن

تابع جبری^۲ نیز همچون دیگر ساختارهای ریاضی بر ساختارهای مفهومی نظام اندیشه انسانی مبتنی است و ویژگی‌های آن براساس نظریه استعاره‌های مفهومی تبیین‌پذیر است. این ویژگی را در زبان نیز می‌توان مشاهده کرد؛ برای نمونه، «روزگاری شد و کس مرد ره عشق ندید» (ابتهاج، بی‌تا، غزل «نشود فاش کسی آنچه میان من و توست»). در این مصراع، «مرد ره عشق» براساس استعاره پایه‌ای «عشق به مثابه سفر»^۳ بنا شده است. این استعاره شبیه یک تابع جبری، حاصل نگاشت از یک حوزه مبدأ (سفر) به یک حوزه مقصد (عشق) است.

۴-۵ جبر برداری

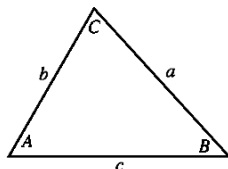
«جبر برداری»^۴ بر مبنای فرضیه ریاضیات بدنمند برآمده از ادراک جسمانی انسان از مفاهیم «جهت» و «اندازه» است. برای نمونه، حرکت در مسیرهای گوناگون با مسافت‌های متفاوت که خود برخاسته از طرح‌واره حرکت^۵ (مبدأ-مسیر-مقصد) است، می‌تواند با یک بردار بازنمایی شود. از آنجاکه اعداد به تنهایی جهت ندارند، برای بازنمایی حرکتی که هم‌زمان اندازه‌ای متناسب با مسافت طی شده و «جهت» دارد، باید از مفهومی دیگر به نام «بردار» بهره گرفت. بردارها برای همه مفاهیم فیزیکی و کمیت‌هایی کاربرد دارند که علاوه بر اندازه، جهت دارند؛ مانند نیرو و «میدان»^۶ که از طرح‌واره نیرو برآمده‌اند. حتی در سطوح استعاری، برای ساده‌سازی محاسبات می‌توان استعاره بردار را برای برخی از مفاهیم اسکالر^۷ و عددی محض نیز به کار برد که در این حالت آن را «فازور»^۸ یا «فازبردار» می‌نامند. پیوند میان ادراک جهت و حرکت در زبان نیز مشهود است؛ برای نمونه، «شهری است پر کرشمه حوران ز شش جهت» (حافظ، بی‌تا، غزل شماره ۳۳۸). در این مصراع، مفهوم «شش جهت» در ساختار ادراکی و اندیشه مخاطب، شش بردار متناظر با شش جهت اصلی را در سه محور مختصات تداعی می‌کند.

تجربه بدنمند حرکت و طی کردن مسافت در جهتی مشخص، به لحاظ ریاضی به صورت «جمع برداری» قابل نمایش است. از این دیدگاه، قوانینی مانند «قانون کسینوس‌ها»^۹ و شکل خاص آن یعنی «قضیه منسوب به فیثاغورس»، مدل‌هایی هندسی برای محاسبه

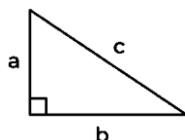
1. J. R. Hass
2. algebraic function
3. love as journey
4. vector algebra
5. locomotion image schema
6. field
7. scalar
8. phasor
9. law of cosines

برآیند اندازه مسافت طی شده در حرکت و تعیین جهت حرکت هستند که می‌توان آن‌ها را حالتی از جمع برداری در نظر گرفت. شکل (۸) قانون کسینوس‌ها و شکل (۹) قضیه منسوب به فیثاغورس را نشان می‌دهند.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



شکل (۸). قانون کسینوس‌ها در محاسبه ضلع مثلث



$$c^2 = a^2 + b^2$$

شکل (۹). قضیه منسوب به فیثاغورس در محاسبه وتر مثلث قائم‌الزاویه

دو نوع ضرب بردارها یعنی ضرب اسکالر (نرده‌ای)^۱ و ضرب برداری^۲ که نتیجه اولی یک عدد و نتیجه دومی یک بردار است نیز می‌توانند محصول دو نوع تجربه بدنمند در نظر گرفته شوند. برای نمونه، مفهوم «کار» یا «انرژی» که حاصل ضرب اسکالر نیرو و جابه‌جایی است، کمیتی بدون جهت است که از «ضرب نرده‌ای» دو بردار حاصل می‌شود. این مفهوم از منظر طرح‌واره نیرو، به‌صورت تجربه بدنمند اعمال نیرو در جهتی خاص و ادراک مصرف انرژی توصیف‌شدنی است. درمقابل، مفهوم «گشتاور»^۳ که حاصل ضرب برداری جابه‌جایی و نیرو است، تجربه‌ای از حرکت دورانی در جهتی خاص (ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد) و به دور یک محور مشخص را بازنمایی می‌کند؛ از این‌رو، گشتاور نیز در قالب یک بردار مفهوم‌سازی می‌شود که از ترکیب دو بردار دیگر پدید آمده است.

«فضای برداری»^۴ طبق تعریف، مجموعه‌ای مشتمل بر اشیایی به نام بردارها است که قوانین جبر برداری در آن برقرار است. مفهوم فضای برداری، خود استعاره‌ای است که در سطح طرح‌واره‌ای از طرح‌واره «فضا» مشتق شده است و قوانین آن موسوم به جبر برداری از مجاز بنیادین جبر یعنی مجاز کل به‌جای جزء بهره می‌برند. نگاه مجموعه‌ای به فضای برداری نیز استعاره‌ای برگرفته از طرح‌واره ظرف است که در بخش جبر مجموعه‌ها شرح داده خواهد شد. علاوه‌براین، همان‌گونه که پیش‌تر شرح داده شد، استفاده از بردار برای نمایش هندسی یک عدد مختلط، خود یک «آمیزه استعاری مفهومی» است.

۴-۶ جبر مجموعه‌ها

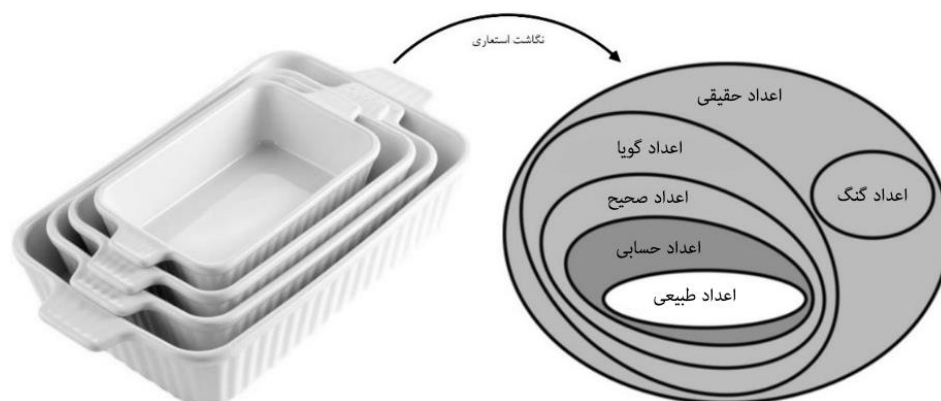
«جبر مجموعه‌ها»^۵ یکی دیگر از مصداق‌های برجسته بدنمندی ریاضیات است. مفهوم ریاضی «مجموعه» بر طرح‌واره تصویری ظرف مبتنی است؛ از این‌رو، استعاره «رده‌ها به‌مثابه ظرف‌ها»^۶ بستری فراهم می‌آورد تا مفاهیم برخاسته از ادراک بدنمند و طرح‌واره تصویری ظرف در جبر مجموعه‌ها نمود یابند. از این مفاهیم می‌توان به «مجموعه تهی»^۷، «زیرمجموعه»^۸ (زیررده)^۹، «اشتراک»^{۱۰}، «اجتماع»^{۱۱}، «متمم»^{۱۲}، «قوانین شرکت‌پذیری»^{۱۳}، «جابه‌جایی»^{۱۴}، «توزیع‌پذیری»^{۱۵}، «تفاضل دو مجموعه»^{۱۶} و مانند آن اشاره کرد.

1. scalar multiplication
2. cross product
3. torque
4. vector space
5. algebra of sets
6. classes as containers
7. empty set
8. subset
9. subclass
10. intersection
11. union
12. complement
13. association
14. commutation
15. distribution
16. set difference

نمونه‌هایی از نمودهای زبانی این مفاهیم عبارت‌اند از:

- مجموعه تهی: «دنيا دیدی و هر چه دیدی هیچ است» (خیام، بی‌تا، رباعی شماره ۱۰۲) یا «دارایی من هیچ است».
- زیرمجموعه: «ما ز دریایم و دریا می‌رویم» (مولانا، بی‌تا، غزل شماره ۱۶۷۴ از دیوان شمس) یا «مؤسسه ما بخشی از یک سازمان دولتی است».
- اشتراک: «نشود فاش کسی آنچه میان من و تو است» (ابتهاج، بی‌تا، غزل «نشود فاش کسی آنچه میان من و توست») یا «منافع مشترکمان تأمین می‌شود».
- اجتماع: «دست در دست هم دهیم به مهر» (یمینی شریف، بی‌تا، شعر «میهن خویش را کنیم آباد») یا «مجموع کتاب‌های ما یک کتابخانه خواهد شد».
- متمم: «تمام ناتمام من با تو تمام می‌شود» (قنبری، بی‌تا، ترانه «تمام من») یا «تمام آنچه من ندارم».
- جابه‌جایی: «گهی پشت به زین و گهی زین به پشت» (فردوسی، بی‌تا، داستان رستم و سهراب در شاهنامه).
- تفاضل دو مجموعه: «آنچه تو داری و من ندارم».

استعاره «مجموعه‌ها به‌مثابه اشیاء»^۱ سبب خواهد شد بسیاری از مفاهیم و ساختارهای ریاضی را بتوان در جبر مجموعه‌ها جای داد. برای نمونه، آمیزه مفهومی دوتایی مرتب را می‌توان آمیزه‌ای از دو مجموعه در نظر گرفت یا آن را به‌صورت استعاری همچون دو شیء تصور کرد که هریک از ظرفی برداشته شده است و در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. مفهوم «زیرمجموعه» براساس طرحواره تصویری ظرف، از نظر استعاری، به ظرف‌های کوچک‌تری می‌ماند که درون ظرف بزرگ‌تری جای گرفته‌اند. شکل (۱۰) این استعاره را در قالب مفهوم‌سازی مجموعه اعداد نشان می‌دهد. مفهوم «مجموعه تهی» نیز در سطح طرحواره‌ای از «طرحواره وجود»^۲ نشئت می‌گیرد و مفهوم «نیستی» را به‌صورت استعاری به جبر مجموعه‌ها می‌نگارد. این مفهوم از منظر طرحواره ظرف، تعبیری از فضای خالی شده از اشیاء نیز است؛ چنان‌که می‌توان مجموعه تهی را نگاشت استعاری «عدد صفر» در حساب (به‌مثابه حوزه مبدأ) به جبر مجموعه‌ها (به‌مثابه حوزه مقصد) دانست.



شکل (۱۰). استعاره زیرمجموعه به‌مثابه ظروف کوچک‌تر داخل ظرف بزرگ‌تر براساس مفهوم‌سازی مجموعه اعداد

۵- نتیجه‌گیری

باتوجه به اینکه علوم شناختی بر شناسایی قوای شناختی انسان، یا به بیان ساده‌تر، «شناخت شناخت»^۳، متمرکز است و زبان به منزله پنجره‌ای به سوی بنای نظام اندیشه، بازتاب‌دهنده بخشی از ساخت‌های مفهومی ذهن انسان است، شناسایی ساخت‌های مفهومی تعبیه‌شده در زبان، راهی به سمت بازشناسی الگوهای اندیشه محسوب می‌شود؛ الگوهایی که در ریاضیات نیز قابل‌شناسایی هستند. جبر در حالت کلی برآمده از مجاز مفهومی، به‌ویژه از نوع مجاز کل به‌جای جزء است و در اجزای درونی آن نیز می‌توان انواع دیگری از

1. sets as objects
2. existence image schema
3. metacognition

ساخت‌های مفهومی را شناسایی کرد. برای نمونه، روابط جبری با بهره‌گیری از نمادهایی مانند x که بیشتر مجهول یا متغیر خوانده می‌شوند، مصداق‌هایی از مجاز کل به‌جای جزء هستند که در آن‌ها، کل (نماد) بر جزء (عدد، مجموعه، بردار و غیره) دلالت دارد. افزون‌براین، نقش «طرح‌واره‌های تصویری» به‌منزله انتزاعی‌ترین بخش نظام اندیشه با روش «مهندسی معکوس»^۱ در ریاضیات قابل‌شناسایی است. جدول (۱) برخی ساخت‌های مفهومی متناظر با جبر و اجزای آن و طرح‌واره(های) تصویری پایه‌زاینده آن‌ها را نشان می‌دهد.

جدول (۱). برخی ساخت‌های مفهومی متناظر با جبر و اجزای آن و طرح‌واره(های) تصویری پایه‌زاینده آن‌ها

اجزای جبر	ساختار مفهومی متناظر	طرح‌واره تصویری پایه	تعمیم طرح‌واره‌ای
متغیر (مجهول) x	مجاز کل به‌جای جزء	طرح‌واره ظرف	طرح‌واره فضا: فضای هیلبرت طرح‌واره حرکت: فیزیک مکانیک
رابطه ریاضی	آمیزه مفهومی	طرح‌واره ظرف	طرح‌واره فضا: هندسه تحلیلی طرح‌واره حرکت: مکان هندسی، مفهوم مکان
تابع ریاضی	استعاره مفهومی	طرح‌واره ظرف	طرح‌واره فضا: منحنی‌ها، مثلثات طرح‌واره حرکت: معادلات حرکت
جبر مجموعه‌ها	مجاز کل به‌جای جزء	طرح‌واره ظرف	طرح‌واره فضا: توپولوژی طرح‌واره حرکت: فضای برداری
جبر بردارها	مجاز کل به‌جای جزء	طرح‌واره حرکت	طرح‌واره فضا: فضای برداری طرح‌واره ظرف: مکانیک آماری

ساخت‌های مفهومی در جدول (۱) به‌صورت استعاره مفهومی، مجاز مفهومی و آمیزه مفهومی، قابلیت تعمیم به دیگر طرح‌واره‌های تصویری را دارند؛ تعمیمی که خود زاینده مفاهیم و ساختارهای ریاضیاتی نوین است. این ساختارهای نوین، امکان استفاده به‌منزله زبان توصیفی دیگر علوم مانند فیزیک را دارند. شایان ذکر است که موارد ستون «تعمیم طرح‌واره‌ای» در جدول (۱)، تنها گزینه‌های موجود برای این نوع تعمیم نیستند و فقط برای نمونه بیان شده‌اند؛ زیرا در بسیاری از علوم، ترکیبی پیچیده از طرح‌واره‌ها و ساخت‌های مفهومی مطرح است که نمی‌توان آن‌ها را به یک طرح‌واره مشخص یا یک ساخت مفهومی واحد کاهش داد.

در نتیجه‌گیری این پژوهش توصیفی و بر مبنای فرضیه ریاضیات بدنمند می‌توان گفت ریاضیات همچون زبان از نظام اندیشه و قوای شناختی انسان نشئت می‌گیرد. از این‌رو، مفاهیم پایه علم جبر مانند مجهول، هندسه تحلیلی، رابطه و تابع ریاضی، اتحاد، معادله و نامعادله، جبر بردارها و جبر مجموعه‌ها در این پژوهش براساس ساخت‌های مفهومی همچون مجاز، استعاره و آمیزه مفهومی بررسی و تبیین شده‌اند. این رویکرد می‌تواند در بهینه‌سازی آموزش ریاضیات مؤثر باشد.

افزون‌براین، باتوجه به گسترده‌بودن پژوهش‌ها در حوزه آموزش ریاضیات، فرضیه ریاضیات بدنمند بیش از آنکه در پی ابداع روش‌های آموزشی نوین باشد، به‌مثابه چارچوبی مقدماتی برای تبیین و درک مفاهیم در مراحل آغازین یادگیری عمل می‌کند. اثربخشی این رویکرد را می‌توان با رویکردی تجربی و با سنجش میزان بهبود بازدهی یادگیری مفاهیم ریاضی ارزیابی کرد. بنابراین، برای بهبود آموزش ریاضیات، به‌ویژه در حوزه جبر پیشنهاد می‌شود آموزش ساخت‌های مفهومی مبتنی بر معناشناسی شناختی در اولویت برنامه‌های آموزشی قرار گیرد. از این‌رو، آشنایی مقدماتی ریاضی‌آموزان با ساخت‌های مفهومی و مبانی معناشناسی شناختی در سطوح پایه ضروری است تا برپایه این درک اولیه، مفاهیم بنیادین جبر توصیف و تدریس شوند.

بنابراین، فرضیه ریاضیات بدنمند می‌تواند با ایجاد نوعی استنتاج مبتنی بر تعامل میان پیش‌فرض‌ها و داده‌ها، به‌منزله مقدمه‌ای در آموزش ریاضیات عمل کند و کارآمدی این فرایند را ارتقا بخشد. در این زمینه، اتخاذ رویکردی شناختی در تبیین خاستگاه جبر و ساختارهای جبری که بخشی عمده از آموزش ریاضیات را تشکیل می‌دهند، می‌تواند در بهبود یادگیری و افزایش بازدهی آموزش در این حوزه نقشی اساسی داشته باشد.

در نهایت، در پژوهش حاضر بر جنبه بدنمندی در فرضیه ریاضیات بدنمند و نقش آن در شکل‌گیری مفاهیم پایه جبری بیشتر تأکید شد. از آنجاکه «رویکرد شناخت چهاروجهی»^۲ دارای چهار وجه شامل «بدنمندی» (تأکید بر نقش جسمانی‌بودن بر ذهن و در نظام

اندیشه)، «تعبیه‌شدگی»^۱ (تأکید بر نقش تعامل بدن و محیط در شناخت)، «ذهن گسترده»^۲ (تأکید بر محدود نبودن ذهن به چارچوب فیزیکی مغز یا بدن و توان گسترش آن به محیط و نقش این پدیده در شناخت) و «وضع‌گرایی»^۳ (تأکید بر نقش تعامل پویا بین ارگانیسم، کنشگر و محیط در شناخت) است، برای بسط این پژوهش در آینده، می‌توان افزون بر بدتمندی، سه عنصر دیگر «رویکرد شناخت چهاروجهی»، را نیز برای توصیف مفاهیم پایه ریاضی در دو حوزه جبری و غیرجبری به کار برد. همچنین بهره‌گیری از یافته‌های علوم اعصاب شناختی می‌تواند به بسط بیشتر این پژوهش یاری رساند. افزون‌براین، از آنجاکه در این پژوهش، تمرکز اصلی بر مفاهیم بنیادین جبر معطوف بوده است، در پژوهش‌های آینده می‌توان مفاهیم پیچیده‌تر جبری را نیز از منظر معناشناسی شناختی تبیین کرد.

منابع

- ابتهجاج، هوشنگ (بی‌تا). نشود فاش کسی آنچه میان من و توس. نشر آرا. بازیابی شده در تاریخ ۱۸ شهریور ۱۴۰۵ از تارنمای اینترنتی نشر آرا حافظ، شمس‌الدین محمد (بی‌تا). غزلیات. گنجور. بازیابی شده در تاریخ ۱۸ شهریور ۱۴۰۵ از تارنمای اینترنتی گنجور خوارزمی، محمد بن موسی (۱۹۸ ه.ق). جبر و مقابله. مترجم: حسین خدیوچم (۱۳۶۳). تهران: انتشارات اطلاعات.
- خیام، عمر بن ابراهیم (بی‌تا). رباعی شماره ۱۰۲. بازیابی شده در تاریخ ۱۸ شهریور ۱۴۰۵ از تارنمای اینترنتی گنجور دهخدا، علی‌اکبر (۱۴۰۵). جبر. لغت‌نامه دهخدا. بازیابی شده در تاریخ ۱۸ شهریور ۱۴۰۵ از لغت‌نامه دهخدا آبادیس سعدی، مصلح بن عبدالله (بی‌تا). غزلیات. بازیابی شده در تاریخ ۱۸ شهریور ۱۴۰۵ از تارنمای اینترنتی گنجور شاملو، احمد (۱۳۵۸). در این بن بست. وب‌سایت رسمی احمد شاملو. بازیابی شده در تاریخ ۱۸ شهریور ۱۴۰۵ از وب‌سایت رسمی احمد شاملو صال مصلحیان، محمد (۱۳۸۴). فلسفه ریاضی (کلاسیک، مدرن، پست مدرن). مشهد: انتشارات واژگان خرد.
- فردوسی، ابوالقاسم (بی‌تا). داستان رستم و سهراب در شاهنامه. بازیابی شده در تاریخ ۱۸ شهریور ۱۴۰۵ از تارنمای اینترنتی ویکی شاهنامه فروغی بسطامی، عباس (بی‌تا). غزل شماره ۲۲۶. بازیابی شده در تاریخ ۱۸ شهریور ۱۴۰۵ از تارنمای اینترنتی گنجور قنبری، شهریار (بی‌تا). تمام من. لاجینی. بازیابی شده در تاریخ ۱۸ شهریور ۱۴۰۵ از تارنمای اینترنتی لاجینی مولانا، جلال‌الدین محمد (بی‌تا). غزل شماره ۱۶۷۴ از دیوان شمس. بازیابی شده در تاریخ ۱۸ شهریور ۱۴۰۵ از تارنمای اینترنتی گنجور یمینی شریف، عباس (بی‌تا). میهن خویش را کنیم آباد. کتابک. بازیابی شده در تاریخ ۱۸ شهریور ۱۴۰۵ از تارنمای اینترنتی کتابک

References

- Benczes, R. (2009). Visual metonymy and framing in political communication. *Journalism and Mass Communication Quarterly*, 86(1), 777–797.
- Crane, T. (2015). *The mechanical mind: A philosophical introduction to minds, machines and mental representation*. Routledge.
- Dehkhoda, A. A. (2026). Jabr. In *Dehkhoda dictionary*. Abadis. Retrieved September 9, 2026, from <https://abadis.ir/fatofa/جبر/> (in Persian)
- Ebtehaj, H. (n.d.). *Nashavad fash-e kasi anche mian-e man o to-st* [The secret of what is between you and me should not be revealed to anyone]. Nashr-Ara. Retrieved September 9, 2026, from nashrara.ir/poems/متن-شعر-زبان-نگاه-ابتهجاج/ (In Persian)
- Entman, R. M. (1993). Framing: Toward clarification of a fractured paradigm. In D. McQuail (Ed.), *McQuail's reader in mass communication theory* (pp. 390–397). SAGE.
- Evans, V. (2019). *Cognitive linguistics: A complete guide*. Edinburgh University Press.
- Ferdowsi, A. (n.d.). The story of Rostam and Sohrab. *Wiki Shahnameh*. Retrieved September 9, 2026, from <https://wikishahnameh.com> (in Persian)
- Foroughi Bastami, A. (n.d.). *Ghazal No. 226*. Ganjoor. Retrieved September 9, 2026, from <https://ganjoor.net/forooghi/divan-forooghi/ghazalf/sh226> (in Persian)
- Ghanbari, S. (n.d.). *Tamam-e Man*. Lachini. Retrieved September 9, 2026, from <http://lachini.com/>
- Hafez, S. M. (n.d.). *Ghazals*. Ganjoor. Retrieved September 9, 2026, from <https://ganjoor.net/hafez/ghazal/> (in Persian)
- Hass, J. R., Heil, C., & Weir, M. D. (2018). *Thomas' calculus*. Pearson.

1. embeddedness
2. extended mind
3. enactivism

- Khayyam, O. (n.d.). *Quatrain No. 102*. Ganjoor. Retrieved September 9, 2026, from <https://ganjoor.net/khayyam/robaee/sh102> (in Persian)
- Khwarizmi, M. (813 C.E.). *Jabr va moghabele* [*The concise book of calculation by restoration and balancing*] (H. Khadiv, Trans.). (In Persian)
- Kovecses, Z. (2006). *Language, mind, and culture: A practical introduction*. Oxford University Press.
- Kövecses, Z. (2020). *Extended conceptual metaphor theory*. Cambridge University Press.
- Langacker, R. W. (2008). *Cognitive grammar: A basic introduction*. UK: Oxford University Press.
- Littlemore, J. (2015). *Metonymy: Hidden shortcuts in language, thought and communication*. Cambridge University Press.
- Livio, M. (2010). *Is God a mathematician?* Simon and Schuster.
- Mlodinow, L. (2010). *Euclid's window: The story of geometry from parallel lines to hyperspace*. Simon and Schuster.
- Rumi, J. al-Din M. (n.d.). *Ghazal No. 1674 from the divan of Shams*. Ganjoor. <https://ganjoor.net/moulavi/shams/ghazalsh/sh1674> (in Persian)
- Saadi, M. ibn A. (n.d.). *Ghazals*. Ganjoor. Retrieved September 9, 2026, from <https://ganjoor.net/saadi/divan/ghazals/> (in Persian)
- Sal Moslehian, M. (2005). *Philosophy of Mathematics (classic, modern, post-modern)*. Vazhegan-e-Kherad. (In Persian)
- Shamlou, A. (1979). *In this dead end*. Ahmad Shamlou Official Website. Retrieved September 9, 2026, from <https://shamlou.org/> (in Persian)
- Voorhees, B. (2004). Embodied mathematics. *Journal of Consciousness Studies*, 11(9), 83–88.
- Wigner, E. P. (1990). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Mathematics and Science*, 13(1), 1–14.
- Winter, B., & Yoshimi, J. (2020). Metaphor and the philosophical implications of embodied mathematics. *Frontiers in Psychology*, 11, Article 569487.
- Yamini Sharif, A. (n.d.). *Let us build and prosper our homeland*. Ketabk. Retrieved September 9, 2026, from <https://ketabak.org/content/3241>-شرف-یمینی-عباس-آباد-کنیم-خویش-میهن-شعر (in Persian)

