

Triangular bending element with 30-degree freedom including shear deformation

Ahmad Mozafari¹ , Mahmoud Edalati²

1. Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Ilam University, Ilam, Iran. E-mail: mozafari.ahmad@ba.edu.af

2. Corresponding Author, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Ilam University, Ilam, Iran. E-mail: m.edalati@ilam.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received
2025-10-13
Received in revised form
2025-11-22
Accepted
2025-12-21
Available online
2025-12-26

Keywords:

Shape function,
Triangular element,
Bending plate,
Shear deformation,
Concentrated load.

ABSTRACT

Bending plates are among the most fundamental components employed in structural analysis. Despite significant advances in numerical methods, the accurate reproduction of both bending and shear behavior of plates remains a major challenge in plate analysis. The high sensitivity of thin, thick, and very thick plates to issues such as shear locking, the choice of shape functions, and the compatibility of strain fields has motivated continuous research efforts aimed at developing reliable bending plate elements.

In this study, the accuracy and stability of the proposed shape function for the triangular bending plate element ME30, based on the Mindlin–Reissner theory, are evaluated in the analysis of plates and slabs subjected to concentrated loads. The proposed element consists of 10 nodes with 3 degrees of freedom per node and is capable of reproducing transverse shear deformations in a compatible manner. Numerical results for thin steel plates, moderately thick concrete slabs, and very thick slabs demonstrate the convergent behavior of the proposed formulation and its strong agreement with analytical solutions and established numerical formulations. Furthermore, the evaluation of deflection and bending moments confirms the effectiveness of the ME30 shape function in accurately capturing the bending response of plates with varying geometries and thicknesses. The findings indicate that the proposed model can be regarded as a reliable and robust approach for the numerical analysis of bending plates subjected to concentrated loads.

Cite this article: Mozafari, Ahmad., & Edalati, Mahmoud. (2025). Triangular bending element with 30-degree freedom including shear deformation. *Advanced Modeling in Civil Engineering*, 2(2),184- 205.

DOI: 10.22126/amcen.2026.13396.1066



© The Author(s).

DOI: 10.22126/amcen.2026.13396.1066

Publisher: Razi University

Introduction

Reinforced The bending behavior of plates is regarded as a central issue in structural analysis, and its accurate numerical modeling has consistently attracted the attention of researchers. Despite the development of numerous numerical methods and plate elements, the simultaneous simulation of bending and shear responses of plates across a wide range of thicknesses remains a significant challenge. The strong dependence of the numerical performance of thin to very thick plates on factors such as shear locking, the approximation of the displacement field, and the level of strain compatibility has resulted in the continued development and refinement of bending plate elements as an active area of research.

The earliest attempts to formulate plate behavior with sufficient accuracy date back to the classical work of Reissner in 1945, who introduced the elastic equilibrium equations of bending plates under the assumption of zero transverse normal strain[1]. Subsequent studies, such as those of Popplewell and McDonald, focused on the development of triangular and rectangular elements, as well as their combinations, to improve boundary conditions and bending accuracy[2]. Higher-order theories were later advanced through Reddy's third-order shear deformation theory, which became the foundation for many modern bending formulations[3].

Approaches based on free vibration of rectangular plates—such as the work of Leissa—played a significant role in evaluating various boundary conditions and classical Ritz-based solution strategies[4]. More innovative techniques were later introduced, such as the Discrete Shear Gap (DSG) method for controlling shear locking and achieving accurate solutions for plates of irregular geometries, particularly triangular elements[5]. Concurrently, the development of triangular elements with incompatible shear deformation approximations and low-order polynomial formulations significantly enhanced convergence and numerical robustness[6]. Comparisons between different shear deformation theories—including the classical Mindlin–Reissner and higher-order counterparts—such as those presented by Idlbi et al., demonstrated superior accuracy of these theories in many engineering applications compared to classical elastic solutions[7].

More recent advancements include isogeometric formulations for Mindlin–Reissner plates[8] and the development of triangular elements based on compatible strain fields for both static loading and free vibration, which effectively prevent shear locking[9]. Other efforts, such as the work of Lee and co-authors, have refined the formulation of thick plates to reconcile Mindlin solutions with Kirchhoff limits[10].

In the following years, the development of polygonal elements, the modification of strain relations based on Timoshenko beam theory, and extensive investigations aimed at preventing locking in irregular meshes—particularly in the works of Nguyen-Xuan—further expanded the theoretical landscape[11]. In the domain of multilayered and composite plates, bidirectional shear deformation theories of first- and second-order, introduced and evaluated

by Noor and Burton[12] among others, provided deeper insights into layered behavior. Additional progress includes highly accurate rectangular elements based on mixed field interpolation[13], high-order triangular shell elements with fast convergence[14], and improved quadrilateral formulations designed to avoid higher-mode contamination[15].

Similarly, studies on free vibration of laminated plates[16], reviews of shear deformation theories for multilayered panels[17], simplified first-order theories for bending and vibration analysis[18], and investigations of moderately thick plates incorporating transverse shear deformation[19] highlight the persistent demand for models with higher accuracy and computational efficiency. Other research directions—such as hybrid methods for Mindlin–Reissner plates[20], wavelet-based analysis of thin plates[21], dynamic analysis of sandwich structures[22–23], novel theories for composite plates[24], and advanced formulations for sandwich plates[25]—underscore the critical importance of selecting appropriate shape functions and avoiding locking phenomena.

Despite substantial progress in plate bending formulations, many existing elements still encounter significant limitations when subjected to shear locking, high thickness-to-span sensitivity, and reduced accuracy under concentrated loading. These challenges become even more pronounced in plates with variable thickness, irregular geometries, and complex boundary conditions, where many Mindlin–Reissner-based elements achieve acceptable convergence only on highly refined meshes. Consequently, the development of an efficient triangular element capable of accurately representing bending and shear deformation fields in thin, moderately thick, and thick plates—with a limited number of degrees of freedom—remains a critical need in the finite-element literature. Motivated by this gap, the present study introduces the triangular ME30 element and evaluates its accuracy under concentrated loading, aiming to provide a stable and precise numerical tool for bending plate analysis.

Method

A higher-order ten-node triangular Mindlin–Reissner plate element (ME30) was developed to model bending and transverse-shear deformation. Each node carries three degrees of freedom—transverse displacement w , and rotations θ_x and θ_y . The displacement field is interpolated using isoparametric shape functions in the natural coordinate system (s,t) :

$$\begin{aligned} w(s,t) &= \sum_{i=1}^{10} N_i(s,t)w_i \\ \theta_x(s,t) &= \sum_{i=1}^{10} N_i(s,t)\theta_{xi} \\ \theta_y(s,t) &= \sum_{i=1}^{10} N_i(s,t)\theta_{yi} \end{aligned} \tag{1}$$

The bending and shear strain components based on Mindlin–Reissner kinematics are expressed as:

$$\begin{aligned}\{\chi\}_B &= [L_B][N]\{a\} \\ \{\chi\}_S &= [L_S][N]\{a\}\end{aligned}\quad (2)$$

Where $\{a\}$ the vector of nodal degrees of freedom is, $[N]$ contains the shape functions, and $[L_B]$, $[L_S]$ are the differential operator matrices. The transformation between global coordinates (x, y) and natural coordinates (s, t) is obtained through the Jacobian matrix $\{J\}$. The element stiffness matrix is computed by explicit double integration over the parent triangular domain:

$$[K_e] = [K_B] + [K_S] = \int_0^1 \int_0^1 [B_B]^T [D_B][B_B]|J|dsdt + \int_0^1 \int_0^1 [B_S]^T [D_S][B_S]|J|dsdt \quad (3)$$

Where B_B and B_S are the bending and shear strain–displacement matrices, and D_B , D_S are the bending and shear constitutive matrices. A subdivision-based numerical integration scheme is employed to enhance accuracy for higher-order functions. Concentrated loads are included directly in the global load vector. For a point load (P) applied at degree of freedom (m), the corresponding entry (F) of the global force vector is set equal to (P). The global system of finite-element equilibrium equations then takes the standard form:

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (4)$$

Where $[K]$ is the assembled global stiffness matrix and $\{d\}$ is the vector of nodal displacements and rotations. The ME30 element is evaluated through benchmark analyses of simply supported and clamped steel and concrete plates and slabs under a concentrated load. Mesh densities ranging from 2×2 to 8×8 (and non-uniform meshes for rectangular slabs) were used. Central deflection and bending moments were compared with analytical and published numerical solutions to assess accuracy, convergence, and performance in modeling transverse-shear deformation.

Results

The numerical evaluation of the proposed ME30 triangular bending plate element demonstrates strong accuracy and robustness across thin, moderately thick, and very thick plates. Using a ten-node, 30-degree-of-freedom formulation within the Mindlin–Reissner theory, ME30 consistently reproduces both bending and transverse shear deformation fields. Under concentrated loading, the element shows excellent agreement with analytical reference solutions and established numerical formulations.

The computed deflection fields and bending moment distributions confirm that ME30 successfully avoids shear-locking in thin-plate regimes, while maintaining accurate shear representation in thick plates. Convergence studies reveal stable and monotonic behavior across different mesh densities and geometries, with ME30 outperforming classical triangular plate elements. The results collectively verify that the proposed formulation provides a reliable and precise numerical tool for bending-plate analysis under concentrated loads.

Conclusions

This study presented ME30, a ten-node triangular bending plate element with 30 degrees of freedom that effectively captures bending and transverse-shear deformation within the Mindlin–Reissner framework. The numerical investigations—covering thin, medium-thickness, and very thick plates under concentrated loading—demonstrate that ME30 offers high accuracy, stable convergence, and strong agreement with analytical reference solutions.

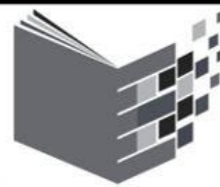
By preventing shear locking in thin plates and accurately representing shear deformation in thick configurations, the proposed formulation overcomes limitations commonly observed in existing triangular elements. Its strong performance on various geometries and loading conditions highlights its potential as a robust and efficient computational tool for plate and slab analysis. Future work may extend the formulation to composite plates, dynamic loading, and shell applications using strain-compatible principles.

Author Contributions

All authors participated in writing and revising the article.

Conflict of Interest

Authors declared no conflict of interest.



جزء صفحه‌ی خمشی مثلثی ۳۰ درجه آزادی با اثر تغییر شکل برشی

احمد مظفری^۱، محمود عدالتی^۲

۱. گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه ایلام، ایلام، ایران. رایانامه: mozafari.ahmad@ba.edu.af

۲. نویسنده مسئول، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه ایلام، ایلام، ایران. رایانامه: m.edalati@ilam.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله:	صفحات خمشی از بنیادی‌ترین اجزای مورد استفاده در تحلیل سازه‌ها به‌شمار می‌روند. با وجود پیشرفت‌های گسترده، بازتولید دقیق رفتار خمشی و برشی آن‌ها همچنان یکی از چالش‌های اساسی در تحلیل عددی صفحات است. حساسیت بالای صفحات نازک، ضخیم و خیلی ضخیم به پدیده‌هایی مانند قفل‌شدگی برشی، انتخاب تابع شکل و سازگاری میدان کرنش، سبب شده است که پژوهش‌های مرتبط با توسعه اجزای خمشی تا امروز ادامه یابد. در این پژوهش دقت و پایداری تابع شکل پیشنهادی برای جزء صفحه خمشی مثلثی ME30، مبتنی بر تئوری میندلین-رایسنر، در تحلیل صفحات و دال‌های تحت بار متمرکز ارزیابی شده است. جزء پیشنهادی دارای ۱۰ گره و ۳ درجه آزادی در هر گره بوده و قادر است تغییر شکل‌های برشی را به‌صورت سازگار بازتولید کند. نتایج عددی برای صفحات فولادی نازک، دال‌های بتنی با ضخامت متوسط و دال‌های بسیار ضخیم، رفتار همگرا و سازگاری این مدل را با پاسخ‌های تحلیلی و فرمول‌بندی‌های معتبر نشان می‌دهد. ارزیابی مقدار خیز و لنگر خمشی نیز کارایی تابع شکل ME30 را در بازنمایی رفتار خمشی صفحات با هندسه و ضخامت متنوع تأیید می‌کند. یافته‌ها حاکی از آن است که مدل پیشنهادی می‌تواند به‌عنوان روشی قابل اتکا برای تحلیل عددی صفحات خمشی تحت بارهای متمرکز به‌کار گرفته شود.
تاریخ دریافت:	
۱۴۰۴/۰۷/۲۱	
تاریخ بازنگری:	
۱۴۰۴/۰۹/۰۱	
تاریخ پذیرش:	
۱۴۰۴/۰۹/۳۰	
تاریخ انتشار:	
۱۴۰۴/۱۰/۰۵	
کلیدواژه‌ها:	
تابع شکل،	
جزء مثلثی،	
صفحه خمشی،	
تغییر شکل برشی،	
بار متمرکز	

استناد: مظفری، احمد؛ عدالتی، محمود. (۱۴۰۴). جزء صفحه‌ی خمشی مثلثی ۳۰ درجه آزادی با اثر تغییر شکل برشی. مجله مدل‌سازی پیشرفته در

مهندسی عمران، ۲(۲)، ۱۵۲-۲۵۰. DOI: 10.22126/amcen.2026.13396.1066



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه رازی.

۱. مقدمه

رفتار خمشی صفحات یکی از مسائل محوری در تحلیل سازه‌ها محسوب می‌شود و مدل‌سازی عددی دقیق آن همواره مورد توجه پژوهشگران بوده است. علی‌رغم توسعه روش‌ها و المان‌های گوناگون، شبیه‌سازی هم‌زمان پاسخ خمشی و برشی صفحات در بازه‌های مختلف ضخامت همچنان با دشواری‌های جدی همراه است. وابستگی شدید عملکرد عددی صفحات نازک تا بسیار ضخیم به عواملی نظیر قفل‌شدگی برشی، نحوه‌ی تقریب میدان جابجایی و میزان سازگاری کرنش‌ها موجب شده است که طراحی و بهبود المان‌های خمشی همچنان به‌عنوان یک حوزه فعال پژوهشی باقی بماند. نخستین تلاش‌ها برای ارائه فرمول‌بندی دقیق صفحات با کار کلاسیک رایسنر^۱ در سال ۱۹۴۵ آغاز شد که معادلات تعادل کشسانی صفحات خمشی با فرض کرنش مساوی با صفر را در راستای ضخامت ارائه کرد[۱].

در ادامه، مطالعاتی چون تحقیقات پاپل‌ول^۲ و مک‌دونالد^۳ بر توسعه اجزای مثلثی و مستطیلی و ترکیب آن‌ها برای بهبود شرایط مرزی و دقت خمشی متمرکز شدند[۲]. نظریه‌های مرتبه بالاتر نیز با کار ردی^۴ بر نظریه مرتبه سوم صفحات توسعه یافتند که پایه بسیاری از تئوری‌های خمشی جدید محسوب می‌شود[۳]. رویکردهای مبتنی بر ارتعاش آزاد صفحات مستطیلی، مانند کار لیساه^۵ نقش مهمی در ارزیابی شرایط مرزی مختلف و روش‌های پایه‌ای مانند ریتز داشته‌اند[۴]. پس از آن، روش‌های نوآورانه‌تری نظیر روش شکاف برشی گسسته برای کنترل قفل‌شدگی و تحلیل دقیق صفحات نامنظم معرفی شد که توانایی بالایی در تحلیل صفحات مثلثی نشان دادند[۵]. هم‌زمان، توسعه اجزای مثلثی با تقریب ناسازگار تغییرشکل برشی و فرمول‌بندی‌های چندجمله‌ای مرتبه پایین باعث افزایش همگرایی و استحکام عددی شد[۶].

مقایسه تئوری‌های مختلف برشی مبتنی بر تئوری میندلین^۶-رایسنر و تئوری‌های مرتبه بالا، مانند مطالعات آیدلبی^۷ و همکاران، نشان

داد که این رویکردها در بسیاری از مسائل از حل‌های کشسانی کلاسیک دقیق‌تر هستند[۷]. پیشرفت‌های جدیدتر شامل روش‌های ایزوژئومتریک برای صفحات میندلین-رایسنر[۸] و طراحی اجزای مثلثی بر پایه میدان کرنش سازگار برای بارگذاری استاتیکی و ارتعاش آزاد است که به‌طور مؤثر از قفل‌شدگی جلوگیری می‌کنند[۹]. همچنین اصلاح روابط صفحات ضخیم، همانند پژوهش لی^۸ و همکاران، امکان تطبیق نتایج میندلین با راه‌حل‌های کرشهف را فراهم ساخت[۱۰]. در سال‌های بعد، توسعه اجزای چندضلعی، اصلاح روابط کرنشی با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و تلاش برای جلوگیری از قفل‌شدگی در تحلیل صفحات نامنظم توسط نگوین ژوان^۹ گسترش یافت[۱۱].

در حوزه صفحات چندلایه و کامپوزیت نیز نظریه‌های دوجهتی بر پایه تغییرشکل برشی مرتبه اول و دوم توسط نور^{۱۰} و بورتن^{۱۱}[۱۲] و دیگر پژوهشگران معرفی و ارزیابی شده است. ارائه اجزای مستطیلی دقیق مبتنی بر توابع میدان مختلط[۱۳]، طراحی پوسته‌های مثلثی با درجات آزادی بالا و همگرایی سریع[۱۴] و توسعه عناصر چهارضلعی اصلاح‌شده برای جلوگیری از اختلاط مودهای مرتبه بالا[۱۵] بخشی از مسیر تکامل اجرای خمشی بوده‌اند.

همچنین، تحلیل ارتعاش آزاد صفحات لایه‌ای[۱۶]، مرور تئوری‌های تغییرشکل برشی برای صفحات چندلایه[۱۷]، توسعه تئوری‌های ساده‌شده مرتبه اول برای تحلیل ارتعاش و خمش[۱۸] و تجزیه و تحلیل صفحات نسبتاً ضخیم با در نظرگیری برش عرضی[۱۹] نشان‌دهنده نیاز مداوم به مدل‌هایی با دقت بالا و کارایی محاسباتی است. پژوهش‌های دیگر مانند روش‌های ترکیبی برای صفحات میندلین-رایسنر[۲۰] روش مویک برای صفحات نازک[۲۱]، تحلیل دینامیکی صفحات ساندویچی[۲۲-۲۳]، تئوری‌های جدید برای صفحات کامپوزیت[۲۴] و پیشرفته‌ترین تحلیل‌ها برای صفحات ساندویچی[۲۵] نیز اهمیت انتخاب تابع شکل مناسب و جلوگیری از قفل‌شدگی را بیش از پیش تقویت کرده‌اند.

¹ E. Reissner² N. Popplewell³ D. McDonald⁴ J. N. Reddy⁵ A. W. Leissa⁶ Mindlin⁷ A. Idlbi⁸ K. H. Lee⁹ H. Nguyen-Xuan¹⁰ A. K. Noor¹¹ W.S. Burton

$$N_1 = 1 - (11s/2) - (11t/2) + 9s^2 + 18st + 9t^2 - (9s^3/2) - (27s^2t/2) - (27t^2s/2) - (9t^3/2) \quad (2)$$

$$N_i = 9m - (45m^2/2) - (45mn/2) + (27m^3/2) + 27m^2n + (27mn^2/2) \quad (3)$$

$$\begin{cases} i=2 \Rightarrow m=s; n=t \\ i=9 \Rightarrow m=t; n=s \end{cases}$$

$$N_i = -(9m/2) + 18m^2 + (9mn/2) - (27m^3/2) - (27m^2n/2) \quad (4)$$

$$\begin{cases} i=3 \Rightarrow m=s; n=t \\ i=8 \Rightarrow m=t; n=s \end{cases}$$

$$N_i = -(9m^2/2) + (9m^3/2) + m \quad (5)$$

$$\begin{cases} i=4 \Rightarrow m=s; n=t \\ i=7 \Rightarrow m=t; n=s \end{cases}$$

$$N_i = -(9mn/2) + (27m^2n/2) \quad (6)$$

$$\begin{cases} i=5 \Rightarrow m=s; n=t \\ i=6 \Rightarrow m=t; n=s \end{cases}$$

$$N_{10} = 27st - 27s^2t - 27st^2 \quad (7)$$

توابع شکل ارائه شده در روابط (۲) تا (۷) معادل توابع شکل مکعبی استاندارد برای المان مثلثی ده گرهی نیستند. اگرچه ساختار کلی آن‌ها از درون‌یابی مرتبه سوم الهام گرفته شده است، در فرمول‌بندی ME30 میدان‌های برشی به صورت مستقل و سازگار با تئوری میندلین-رایسنر درون‌یابی شده و به تبع آن، ماتریس کرنش برشی و نحوه کوپل خمش-برش بازتعریف می‌گردد. این اصلاح هدفمند ضمن حفظ کامل بودن چندجمله‌ای مرتبه سوم، سختی برشی مصنوعی مشاهده شده در توابع مکعبی کلاسیک را کاهش می‌دهد.

با وجود پیشرفت‌های قابل توجه در فرمول‌بندی اجزای صفحه خمشی، بسیاری از عناصر مثلثی موجود همچنان در مواجهه با قفل‌شدگی برشی، حساسیت به نسبت ضخامت بر طول و کاهش دقت تحت بارهای متمرکز با محدودیت روبه‌رو هستند و اغلب تنها در شبکه‌بندی‌های بسیار ریز عملکرد قابل قبول دارند. در این پژوهش، جزء مثلثی ME30 معرفی شده است که مبتنی بر یک تابع شکل جدید می‌باشد؛ تابعی که اگرچه از چارچوب کلی درون‌یابی مکعبی برای مثلث ده‌گره‌ای الهام گرفته شده، اما با اصلاح هدفمند در بازنمایی میدان‌های برشی و نحوه کوپل خمش-برش، از توابع شکل مکعبی کلاسیک متمایز می‌شود و صرفاً یک تغییر جزئی محسوب نمی‌گردد. تمایز اصلی ME30 در این فرمول‌بندی جدید و توانایی آن در بازنمایی همزمان رفتار خمشی و تغییرشکل‌های برشی در چارچوب تئوری میندلین-رایسنر نهفته است؛ به گونه‌ای که نسبت به بسیاری از عناصر مثلثی کلاسیک، حساسیت کمتری به ریزبندی شبکه داشته و در بازه وسیع‌تری از نسبت‌های ضخامت، دقت و پایداری عددی قابل قبولی ارائه می‌دهد.

۲. تئوری صفحات ضخیم

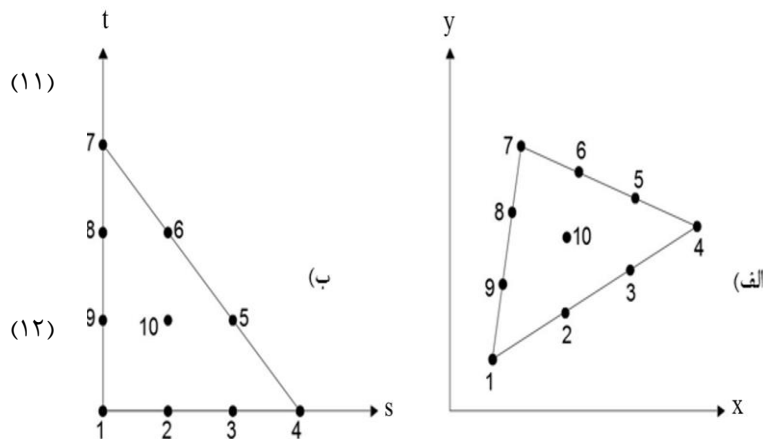
در این پژوهش از تابع شکل ایزوپارامتریک به صورت رابطه (۱) برای جزء صفحه خمشی مثلثی استفاده شده است. همچنین از عبارت مذکور برای معرفی مختصات x و y یک نقطه از جزء صفحه خمشی نیز استفاده می‌شود. جزء صفحه خمشی مثلثی دارای ۱۰ گره بوده و هر گره دارای ۳ درجه آزادی (جابه‌جایی در امتداد ضخامت صفحه، دوران حول محور x و حول محور y) می‌باشد.

$$w = a_1 + a_2s + a_3t + a_4s^2 + a_5st + a_6t^2 + a_7s^3 + a_8s^2t + a_9st^2 + a_{10}t^3 \quad (1)$$

برای محاسبه توابع شکل ایزوپارامتریک، مختصات گره‌های جزء صفحه خمشی را از سیستم دکارتی در شکل ۱-الف) به سیستم طبیعی در شکل ۱-ب) نگاشت کرده و پس از حل دستگاه معادلات همزمان ۱۰ معادله و ۱۰ مجهول، توابع شکل به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$[L_S] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[L_B] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$



شکل ۱. الف) جزء مثلثی خمشی در مختصات دکارتی ب) جزء مثلثی خمشی در مختصات طبیعی

و ماتریس توابع شکل [N] به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$[N] = \sum_{i=1}^{10} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

بردار مجهولات گرهی نیز با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\{a\} = \sum_{i=1}^{10} \begin{bmatrix} w_i & \theta_{xi} & \theta_{yi} \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

حاصلضرب دو ماتریس اول سمت راست روابط (۹) و (۱۰) که به ترتیب ماتریس‌های کرنش خمشی و برشی نامیده می‌شوند را می‌توان با دو رابطه‌ی زیر ارائه کرد:

$$[B_B] = \sum_{i=1}^{10} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (15)$$

جابجایی عرضی و دوران‌ها را می‌توان به طور مستقل با استفاده از توابع شکل فوق به صورت زیر درونیابی کرد:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^{10} N_i(s, t) w_i \\ \theta_x &= \sum_{i=1}^{10} N_i(s, t) \theta_{xi} \\ \theta_y &= \sum_{i=1}^{10} N_i(s, t) \theta_{yi} \end{aligned} \quad (8)$$

در روابط بالا عدد ۱۰ در کران بالای سیگما تعداد گره‌های جزء مثلثی ۱۰ گرهی را نشان می‌دهد. انحنای صفحه بر حسب مجهولات گرهی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\{\chi\}_B = [L_B][N]\{a\} \quad (9)$$

$$\{\chi\}_S = [L_S][N]\{a\} \quad (10)$$

که عملگرهای ماتریس‌های $[L_B]$ و $[L_S]$ توسط روابط زیر بیان می‌شوند:

پس از محاسبه ماتریس سختی کل سازه، بارهای وارد بر سازه را در معادله‌ی حاکم بر سازه اعمال کرده و با اعمال شرایط مرزی، جابه‌جایی گره‌ها از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$\{F\} = [K] \cdot \{d\} \quad (20)$$

در رابطه فوق F بیانگر بردار نیرو و ماتریس d بیانگر بردار جابه‌جایی‌ها و دوران‌های صفحه‌ی خمشی است. برای بارگذاری متمرکز از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$F(m, 1) = P \quad (21)$$

در این رابطه P مقدار بار وارده و m درجه آزادی موردنظر است که بار متمرکز به آن وارد می‌شود.

چون ماتریس سختی به دست آمده دارای متغیرهای s و t است، بنابراین این متغیرها باید در بازه $[0, +1]$ به صورت عددی انتگرال‌گیری شوند تا ماتریس سختی محاسبه گردد.

۳. روش عددی برای محاسبه انتگرال دوگانه

چون در روش ایزوپارامتریک ابعاد شبکه‌بندی جزء صفحه خمشی مثلثی در بین نقاط صفر و ۱ محدود می‌شود، بنابراین باید ماتریس سختی برای دو مختصات s و t در بازه صفر و ۱ انتگرال‌گیری شود. برای حل این انتگرال دوگانه از روش عددی استفاده شده است. روش انتگرال‌گیری عددی انتخاب شده با استفاده از متغیرهای ساده به عنوان توابع، مثلث‌های ناحیه خارجی مساحت انتگرال‌گیری را به مجموعه‌ای از مثلث‌های مشابه تبدیل می‌کند. یک شبکه متغیر روی ناحیه انتگرال‌گیری پوشانده می‌شود که استفاده از این شبکه متغیر باعث مشابه شدن احجام ابتدایی می‌شود [۲۶]. در انتگرال دوگانه با حدود متغیر، محاسبه خطای محاسباتی با استفاده از روش‌های کلاسیک ممکن نیست. حدود متغیر انتگرال مطابق رابطه زیر است:

$$I(\tau) = \int_0^{g_1(\tau)} \int_0^{g_2(\tau')} f(\tau', \tau'', \tau) d\tau'' d\tau' \quad (22)$$

$$[B_s] = \sum_{i=1}^{10} \begin{bmatrix} -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i \\ -\frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

چون روابط فوق بر اساس مشتق متغیرهای X و Y بوده و توابع شکل بر اساس متغیرهای بدون بعد s و t محاسبه شده است، بنابراین از ماتریس ژاکوبین برای تبدیل مختصات دکارتی X و Y به مختصات طبیعی s و t به طور زیر برای هر تابع دلخواه ریاضی استفاده می‌شود.

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \frac{\partial N}{\partial s} \right\}; (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (17)$$

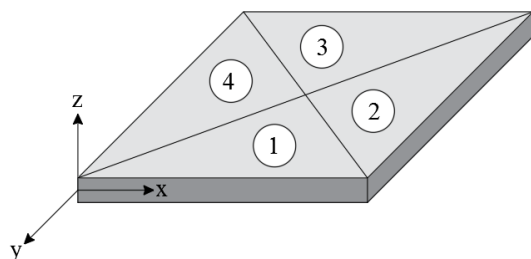
که در آن ماتریس $[J]$ مساوی است با:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (18)$$

با استفاده از دو رابطه‌ی اخیر، تمامی متغیرهای X و Y به متغیرهای s و t قابل تبدیل هستند. بنابراین ماتریس سختی را می‌توان با مدنظر گرفتن ماتریس ژاکوبین، برای دو حالت خمش و برش به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} [K_e] &= [K_B] + [K_S] \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [B_B]^T [D_B] [B_B] |J| ds dt \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 [B_S]^T [D_S] [B_S] |J| ds dt \end{aligned} \quad (19)$$

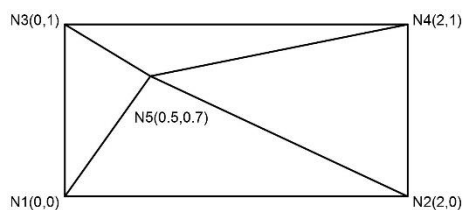
در رابطه بالا $[K_e]$ ماتریس سختی کل هر جزء، $[K_B]$ ماتریس سختی خمشی یک جزء و $[K_S]$ ماتریس سختی برشی آن است.



شکل ۲. نام‌گذاری شبکه‌بندی جزء صفحه خمشی مثلثی ۲×۲

۴-۱. آزمون وصله (Patch Test)

به منظور بررسی سازگاری سینماتیکی و صحت فرمول‌بندی جزء پیشنهادی شکل (۳)، آزمون وصله انجام شده است. در این آزمون، یک صفحه با شبکه‌بندی نامنظم شامل چهار گره مرزی و یک گره داخلی در نظر گرفته شده و به جای اعمال بار خارجی، یک میدان تحلیلی از پیش معلوم به گره‌های مرزی تحمیل می‌شود.



شکل ۳. شبکه‌بندی صفحه خمشی برای آزمون وصله (Patch Test)

هدف از این آزمون، ارزیابی توانایی المان در بازتولید دقیق یک میدان خمش ثابت و بررسی صحت مونتاژ ماتریس سختی است. در آزمون حاضر، ضخامت صفحه برابر با $h = 0.01$ ، مدول الاستیسیته $E = 10^7$ و ضریب پواسون $\nu = 0.3$ در نظر گرفته شده است. میدان تحلیلی تحمیل‌شده به گره‌های مرزی به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۷]:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= x^2 + xy + y^2 \\ \theta_x(x, y) &= x + 2y \\ \theta_y(x, y) &= -(2x + y) \end{aligned} \quad (24)$$

مقادیر τ' و τ'' تابعی از متغیرهای مستقل‌اند که شامل بازه $[0, \infty)$ می‌شوند. فرض بر این است که توابع $f(\tau', \tau'', \tau)$ ، $g_1(\tau)$ و $g_2(\tau')$ تمامی شرایط لازم را دارا هستند. توابع $g_1(\tau)$ و $g_2(\tau')$ باید در نواحی تعریف‌شان پیوسته باشند تا بتوان معکوس توابع را محاسبه کرد. سپس با استفاده از تبدیل $I(\tau) = k_{ij}$ و $g_2(\tau') = t$ ، $g_1(\tau) = s$ می‌توان رابطه فوق را برای محاسبه ماتریس سختی جزء صفحه‌ی خمشی، به صورت زیر بیان کرد:

$$k_{ij} = \int_0^s \int_0^t f(s, t) |J| ds dt \quad (23)$$

در رابطه فوق k_{ij} درایه ماتریس سختی، $f(s, t)$ تابع مربوط به درایه‌ی ماتریس سختی قبل از انتگرال‌گیری و پارامترهای s و t محورها‌ی سیستم طبیعی هستند که در بازه صفر و +۱ تغییر می‌کنند.

۴. حل مثال‌های عددی

در این بخش دقت تابع پیشنهادی برای جزء صفحه خمشی مثلثی (ME30) با تئوری میندلین-رایسنر ارائه شده است. دقت این تابع نخست با آزمون وصله و سپس توسط حل ۴ مثال با انواع مختلف صفحات از جمله: صفحه فولادی، دال بتنی مربعی، دال بتنی مستطیلی و دال بتنی خیلی ضخیم تحت شرایط بارگذاری متمرکز و شرایط اتکایی ساده و گیردار مورد مطالعه قرار گرفته است. در حل این مثال‌ها از اصطلاح شبکه‌بندی ۲×۲، ۴×۴، ۶×۶ و ۸×۸ برای صفحات استفاده شده است، هرچند این نوع نام‌گذاری برای شبکه‌بندی اجزای مثلثی چندان مرسوم نیست، اما بخاطر سهولت در نشان دادن تعداد اجزای مثلثی از نام‌گذاری این نوع شبکه‌بندی استفاده شده است که در شکل (۲) این مفهوم به طور واضح بیان شده است.

جدول ۲. تحلیل صفحه‌ی فولادی تحت بار متمرکز و تکیه‌گاه‌های ساده برای

$\left(\frac{W_{\max}}{Pa^2/D}\right)$ چهار لبه‌ی آن						
۸×۸	۶×۶	۴×۴	۲×۲	h/a	a	h
۰/۰۰۹۴۷	۰/۰۰۸۷۵	۰/۰۰۷۱۴	۰/۰۰۶۲۴	۰/۰۰۱	۱۰۰۰	۱
				درصد اختلاف [۲۸]		
-۱۸٪/۰.۳۲	-۲۴٪/۰.۶۲	-۳۸٪/۰.۴۱	-۴۶٪/۰.۱۷			
				درصد اختلاف [۲۹]		
-۳۰٪/۰.۸۷	-۳۶٪/۰.۱۳	-۴۷٪/۰.۸۸	-۵۴٪/۰.۴۵			
				درصد اختلاف [۲۸]		
۰/۰۰۹۸۴	۰/۰۰۹۰۵	۰/۰۰۷۴۰	۰/۰۰۶۷۲	۰/۰۰۵	۱۰۰۰	۵
				درصد اختلاف [۲۸]		
-۱۵٪/۰.۱۷	-۲۱٪/۰.۹۶	-۳۶٪/۰.۱۸	-۴۲٪/۰.۰۲			
				درصد اختلاف [۲۹]		
-۲۸٪/۰.۱۷	-۳۳٪/۰.۹۴	-۴۵٪/۰.۹۸	-۵۰٪/۰.۹۴			
				درصد اختلاف [۲۸]		
۰/۰۱۰۰۳	۰/۰۰۹۱۸	۰/۰۰۷۸۷	۰/۰۰۶۹۸	۰/۰۱	۱۰۰۰	۱۰
				درصد اختلاف [۲۸]		
-۱۳٪/۰.۴۶	-۲۰٪/۰.۸۶	-۳۲٪/۰.۱۸	-۳۹٪/۰.۸۱			
				درصد اختلاف [۲۹]		
-۲۶٪/۰.۷۸	-۳۲٪/۰.۹۸	-۴۲٪/۰.۵۵	-۴۹٪/۰.۰۵			
				درصد اختلاف [۲۸]		
۰/۰۱۰۰۳	۰/۰۰۹۹۶	۰/۰۰۹۳۳	۰/۰۰۷۲۷	۰/۰.۵	۱۰۰۰	۵۰
				درصد اختلاف [۲۸]		
-۱۱٪/۰.۰۴	-۱۴٪/۰.۱۲	-۱۹٪/۰.۵۸	-۳۷٪/۰.۲۸			
				درصد اختلاف [۲۹]		
-۲۴٪/۰.۸۱	-۲۷٪/۰.۲۹	-۳۱٪/۰.۸۹	-۴۶٪/۰.۹۳			
				درصد اختلاف [۲۸]		
۰/۰۱۰۶۴	۰/۰۱۰۰۲	۰/۰۰۹۹۱	۰/۰۰۷۶۴	۰/۱	۱۰۰۰	۱۰۰
				درصد اختلاف [۲۸]		
-۸٪/۰.۲۲	-۱۱٪/۰.۴۷	-۱۴٪/۰.۵۵	-۳۴٪/۰.۱۰			
				درصد اختلاف [۲۹]		
-۲۲٪/۰.۳۴	-۲۵٪/۰.۵۵	-۲۷٪/۰.۶۶	-۴۴٪/۰.۲۳			
				درصد اختلاف [۲۸]		
				حل دقیق (بدون اثر تغییر شکل برشی) [۲۸]		
۰/۰۱۱۶۰						
				حل عددی (با اثر تغییر شکل برشی) [۲۹]		
۰/۰۱۳۷						

در تمامی تحلیل‌ها، جابه‌جایی مرکز صفحه خمشی به صورت بی‌بعد ارائه شده است تا امکان مقایسه نتایج برای بارگذاری‌ها و ابعاد مختلف فراهم شود. نتایج جدول (۱) رفتار خمشی صفحه فولادی با تکیه‌گاه ساده تحت بار متمرکز را نشان داده و وابستگی خیز بی‌بعد به نسبت ضخامت صفحه و ریزبندی شبکه را مشخص می‌کند. در صفحات نازک، به‌ویژه در شبکه‌های درشت، اختلاف قابل توجهی

این میدان شامل جابجایی خمشی درجه دو و دوران‌های خطی بوده و منجر به کرنش و لنگر خمشی ثابت در کل دامنه می‌شود. مقادیر تحلیلی در گره داخلی با مختصات $(x, y) = (0.5, 0.7)$ در جدول (۱) آمده است:

جدول ۱. نتایج آزمون وصله برای جزء صفحه‌ی خمشی پیشنهادی

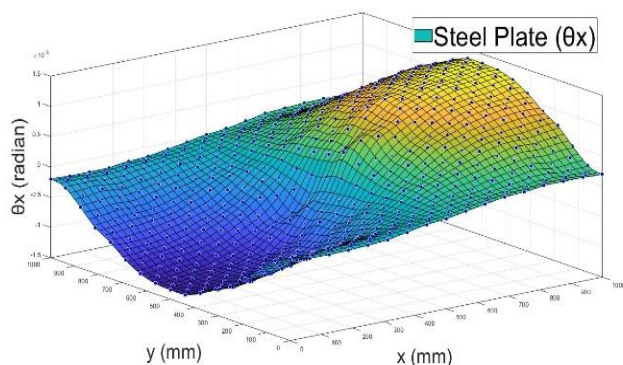
جزء پیشنهادی	جابجایی و دوران‌ها در گره ۵		
	θ_y	θ_x	w
ME30	-۱/۷۰	۱/۹۰	۱/۰۹۰
حل دقیق [۲۷]	-۱/۷۰	۱/۹۰	۱/۰۹۰

نتایج عددی نشان می‌دهد که المان پیشنهادی قادر به بازتولید دقیق مقادیر تحلیلی در گره داخلی بوده که بیانگر سازگاری میدان تغییر شکل و صحت مونتاژ ماتریس سختی است. همچنین، همخوانی نتایج در ناحیه اتصال المان‌ها حاکی از بازسازی سازگار میدان کرنش برشی در مرز المان‌های مجاور و عدم بروز ناپوستگی بین‌المانی است. عبور موفق از آزمون وصله تأیید می‌کند که فرمول‌بندی المان از نظر سینماتیکی معتبر بوده و بازسازی کرنش برشی مبتنی بر روش DSG، که در بخش مربوطه تشریح می‌شود، سازگاری میدان کرنش را حتی در حضور درجات آزادی بالا حفظ می‌نماید. لازم به ذکر است که آزمون تست وصله به‌تنهایی معیاری برای ارزیابی قفل‌شدگی برشی نبوده و این پدیده به‌طور مستقل بررسی شده است.

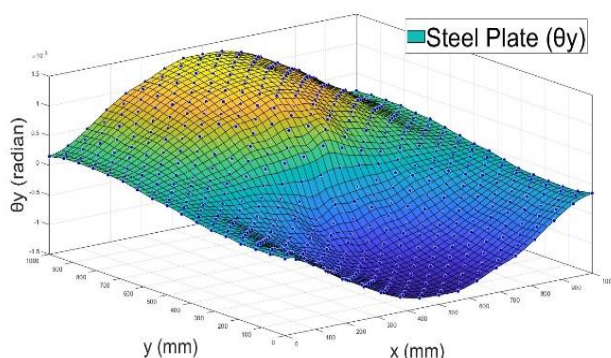
۲-۴. تحلیل صفحه‌ی فولادی تحت بار متمرکز با تکیه‌گاه‌های ساده

در این مثال به بررسی و تحلیل یک صفحه‌ی فولادی مربعی (نوع فولاد $ASTM - A36$) با ابعاد $a = 1000 \text{ mm}$ ، ضریب کشسانی $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ و ضریب پواسون $\nu = 0.3$ ، تحت بار متمرکز $P = -10^6 \text{ N}$ پرداخته می‌شود. مقادیر ضخامت در این تحلیل متفاوت بوده که از صفحات نازک تا صفحات نسبتاً ضخیم را شامل می‌شود. محاسبه‌ی نتایج حل عددی برای جابه‌جایی صفحه فولادی تحت بار متمرکز و تکیه‌گاه‌های ساده در (جدول) آمده است.

گزارش شده است. رفتار کلی نمودارها نشان می‌دهد که مدل عددی توانسته است شرایط مرزی و الگوی خمش صفحه‌ی فولادی را با دقت مناسب ارائه کند.



شکل ۵. دوران صفحه‌ی فولادی حول محور X تحت بار متمرکز با تکیه‌گاه‌های ساده

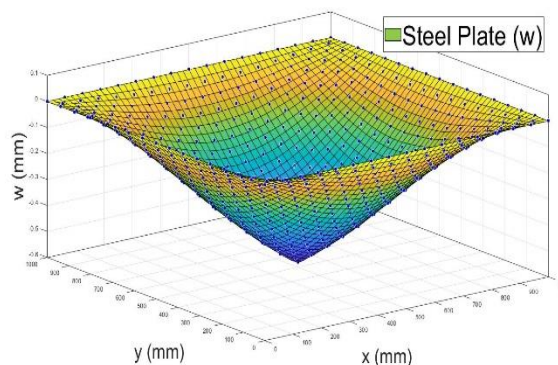


شکل ۶. دوران صفحه‌ی فولادی حول محور Y تحت بار متمرکز با تکیه‌گاه‌های ساده

همگرایی تحلیلی خیز صفحه‌ی فولادی با ضخامت ۱۰۰ میلی‌متر در شبکه‌بندی‌های مختلف در (شکل ۷) ارائه شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، شبکه‌های درشت‌تر یعنی ۲×۲ بیشترین اختلاف را با حل تحلیلی دارند و با اصلاح تدریجی شبکه، اختلاف به‌صورت یکنواخت کاهش می‌یابد. این روند بیانگر آن است که افزایش تعداد تقسیمات موجب بازنمایی دقیق‌تر توزیع سختی خمشی و برشی شده و حل عددی را به حل تحلیلی نزدیک‌تر می‌سازد.

بین حل عددی و مقدار تحلیلی مشاهده می‌شود که بیانگر حساسیت بالای این صفحات به گسسته‌سازی و اثرات برشی است؛ در این حالت، افزایش ریزبندی شبکه نقش اصلی در بهبود دقت و همگرایی دارد. با افزایش ضخامت صفحه، پاسخ عددی پایدارتر شده و اختلاف نتایج در تمامی شبکه‌ها به‌طور یکنواخت کاهش می‌یابد؛ به‌گونه‌ای که اختلاف از حدود ۵۲٪ به ۳۴٪ در شبکه ۲×۲ و از ۳۸٪ به ۸٪ در شبکه ۸×۸ کاهش می‌یابد. این روند نشان‌دهنده دقت و پایداری بیشتر مدل عددی در صفحات ضخیم‌تر است.

در مجموع، نتایج جدول بالا نشان می‌دهد که تئوری میندلین-رایسنر در نسبت‌های ضخامت نزدیک به h/a بیشترین دقت را ارائه می‌دهد و مدل عددی حاضر از همگرایی منظم و توان پیش‌بینی مناسبی برخوردار است، به‌ویژه برای صفحات با ضخامت متوسط و زیاد. توزیع جابه‌جایی صفحه فولادی با ضخامت ۱۰۰ میلی‌متر برای شبکه ۸×۸ که در (شکل ۴) ارائه شده است، انحراف از الگوی سهمی‌شکل کلاسیک را نشان می‌دهد که ناشی از نقش قابل توجه تغییر شکل‌های برشی در صفحات ضخیم بوده و با تئوری میندلین-رایسنر سازگار است.



شکل ۴. جابه‌جایی صفحه‌ی فولادی تحت بار متمرکز با تکیه‌گاه‌های ساده

نتایج دوران حول محورهای X و Y به ترتیب در (شکل ۵) و (شکل ۶) ارائه شده است. بر اساس شرایط تکیه‌گاهی ساده، دوران در لبه‌ها مقدار غیرصفر دارد و الگوی دوران در راستاهای X و Y به‌طور متناظر و متقارن ظاهر می‌شود. این تقارن ناشی از مربع بودن صفحه و ماهیت متقارن بارگذاری مرکزی است. همچنین مقادیر دوران بر حسب رادیان و جابه‌جایی‌ها بر حسب میلی‌متر

۳-۴. کاهش قفل شدگی برشی با روش DSG

قفل شدگی برشی یکی از مشکلات شناخته شده در تحلیل صفحات نازک مبتنی بر تئوری Mindlin-Reissner است که منجر به سفتی مصنوعی و کاهش غیرواقعی جابجایی ها در نسبت های کوچک h/a می شود. به منظور کاهش این پدیده، در این پژوهش از روش Discrete Shear Gap (DSG) استفاده شده است. در فرمول بندی استاندارد، کرنش های برشی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\gamma_{xz} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (25)$$

$$\gamma_{yz} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}$$

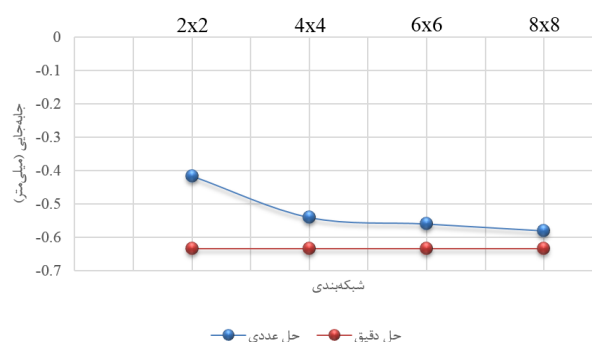
در روش DSG، این کرنش ها به جای محاسبه مستقیم از مشتقات جابجایی، بر اساس مفهوم شکاف برشی و از اختلاف جابجایی ها و دوران ها در امتداد اضلاع المان با سازی می شوند. در فرمول بندی حاضر، اصلاح DSG صرفاً بر روی مؤلفه های کرنش برشی اعمال شده و بخش خمشی ماتریس سختی بدون تغییر باقی مانده است. برای ارزیابی اثر این روش، مثال قبلی بررسی شده است. حل دقیق بدون اثر تغییر شکل برشی $w = 0.01160$ را ارائه می دهد. نتایج این روش در (جدول ۳) نشان داده شده است:

جدول ۳. اثر روش DSG بر قفل شدگی برشی ($h/a=0.001$)

روش استفاده شده	شبکه بندی	حل دقیق [۲۸]	حل عددی	خطای نسبی
بدون اثر DSG	8×8		۰/۰۰۷۰۸	-۳۸٪/۹۳
با اثر DSG	8×8	۰/۰۱۱۶۰	۰/۰۰۹۴۷	-۱۸٪/۳۲

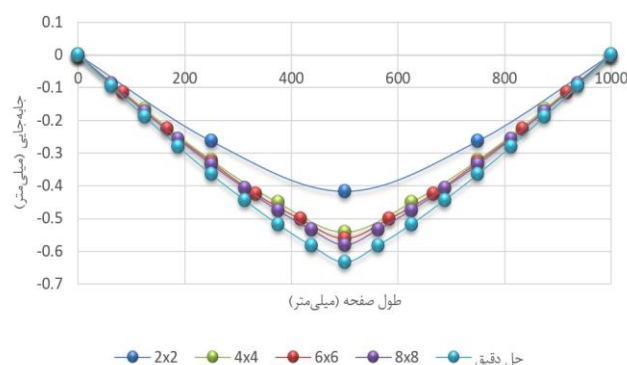
۴-۴. تحلیل دال بتنی مربعی تحت بار متمرکز با تکیه گاه های گیردار

در این مثال به بررسی و تحلیل دال بتنی مربعی با مقاومت فشاری مشخصه ی بتن برابر با $f'_c = 35 \text{ MPa}$ ، ابعاد $a = 1000 \text{ mm}$ ، ضریب کشسانی $E = 28 \times 10^3 \text{ MPa}$ و ضریب پواسون $\nu = 0.2$ تحت بار متمرکز $P = -10^6 \text{ N}$



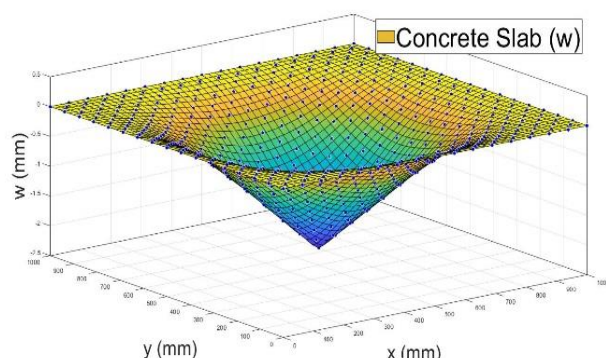
شکل ۷. همگرایی جابه جایی مرکز صفحه ی فولادی تحت بار متمرکز با تکیه گاه های ساده

کاهش درصد اختلاف از حدود ۳۴٪ در شبکه 2×2 به حدود ۸٪ در شبکه 8×8 نشان دهنده همگرایی پایدار و قابل اعتماد روش عددی است. این روند تأیید می کند که در صفحات ضخیم، حساسیت مدل نسبت به اندازه شبکه به مراتب کمتر از صفحات نازک بوده و با افزایش ریزبندی، رفتار واقعی خمش با دقت بالاتری بازتولید می شود. از این رو، نتایج ارائه شده در (شکل ۶) علاوه بر پایداری حل عددی، سازگاری مناسب آن با حل تحلیلی را نیز نشان می دهد. (شکل ۸) الگوی جابه جایی صفحه فولادی تحت بار متمرکز را برای شبکه بندی های مختلف نمایش می دهد. بیشترین اختلاف مربوط به شبکه 2×2 بوده و با افزایش تعداد تقسیمات، نتایج عددی به طور یکنواخت به سمت حل تحلیلی همگرا می شوند؛ به طوری که شبکه 8×8 بیشترین انطباق را ارائه می دهد. این رفتار بیانگر نقش تعیین کننده ریزبندی شبکه در افزایش دقت و تأیید کننده پایداری مدل عددی مورد استفاده است.



شکل ۸. جابه جایی صفحه ی فولادی تحت بار متمرکز با تکیه گاه های ساده و شبکه بندی های مختلف

به‌طور منظم کاهش می‌یابد که بیانگر حساسیت بالای صفحات نازک به گسسته‌سازی و اثرات برشی است. با افزایش ضخامت به ۱۰۰ و ۱۲۰ میلی‌متر، اختلاف نتایج در تمامی شبکه‌ها کاهش یافته و پاسخ عددی به حل مرجع نزدیک‌تر می‌شود که نشان‌دهنده افزایش سختی خمشی و کارایی مناسب تئوری میندلین-رایسنر است. بزرگ‌تر بودن برخی مقادیر عددی نسبت به حل تحلیلی به محدودیت‌های حل تحلیلی کلاسیک و عدم لحاظ تغییر شکل‌های برشی بازمی‌گردد. در ضخامت ۱۵۰ میلی‌متر، اگرچه تغییرات اختلاف یکنواختی کمتری دارد، روند کلی نتایج نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت، خطا در شبکه‌های درشت کاهش یافته و در شبکه‌های ریز کنترل‌شده باقی می‌ماند. در مجموع، جدول (۲) پایداری و دقت مناسب روش عددی مبتنی بر تئوری میندلین-رایسنر را در بازتولید رفتار خمش دال‌های بتنی گیردار تأیید می‌کند. مقادیر جابه‌جایی مرکز دال بتنی و دوران‌ها حول محور X و Y برای ضخامت ۱۰۰ میلی‌متر، به ترتیب در (شکل ۹)، (شکل ۱۰) و (شکل ۱۱) آمده است.



شکل ۹. جابه‌جایی دال بتنی تحت بار متمرکز با تکیه‌گاه‌های گیردار

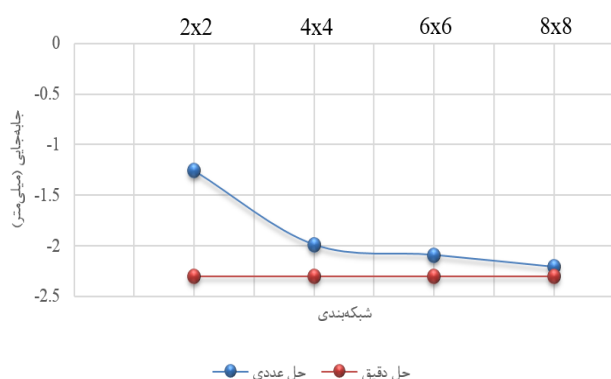
نمودار فوق نشان می‌دهد که بیشترین تغییر مکان در مرکز دال رخ داده و تشکیل یک گودی مشخص، صحت بازنمایی تمرکز بار را تأیید می‌کند. توزیع خیز با مرزهای گیردار سازگار است و دامنه‌ی تغییر مکان‌ها رفتار کلاسیک دال‌های بتنی را بازتاب می‌دهد.

پرداخته می‌شود. محاسبه‌ی نتایج حل عددی برای جابه‌جایی دال بتنی ذکر شده در بالا در (جدول ۳) ارائه شده است.

جدول ۳. تحلیل دال بتنی تحت بار متمرکز با تکیه‌گاه‌های گیردار $\left(\frac{W_{max}}{Pa^2/D}\right)$

تکیه‌گاه	h	a	h/a	۲×۲	۴×۴	۶×۶	۸×۸
۱	۸۰	۱۰۰۰	۰/۰۸	۰/۰۰۲۸۶	۰/۰۰۴۵۶	۰/۰۰۴۸۶	۰/۰۰۵۰۸
	درصد اختلاف [۲۸]						
	درصد اختلاف [۲۹]						
۲	۱۰۰	۱۰۰۰	۰/۱	۰/۰۰۳۰۶	۰/۰۰۴۸۳	۰/۰۰۵۰۸	۰/۰۰۵۳۷
	درصد اختلاف [۲۸]						
	[درصد اختلاف ۲۹]						
۳	۱۲۰	۱۰۰۰	۰/۱۲	۰/۰۰۳۶۵	۰/۰۰۵۳۶	۰/۰۰۵۵۶	۰/۰۰۵۵۹
	درصد اختلاف [۲۸]						
	درصد اختلاف [۲۹]						
۴	۱۵۰	۱۰۰۰	۰/۱۵	۰/۰۰۴۵۲	۰/۰۰۶۲۱	۰/۰۰۶۳۸	۰/۰۰۶۸۱
	درصد اختلاف [۲۸]						
	[درصد اختلاف ۲۹]						
حل دقیق (بدون اثر تغییر شکل برشی) [۲۸]				۰/۰۰۵۶			
حل عددی (با اثر تغییر شکل برشی) [۲۹]				۰/۰۰۷۹			

نتایج (جدول ۴) رفتار خمش دال بتنی گیردار تحت بار متمرکز را برای ضخامت‌ها و شبکه‌بندی‌های مختلف نشان می‌دهد. در ضخامت ۸۰ میلی‌متر، به‌عنوان صفحه نازک، اختلاف حل عددی و تحلیلی در شبکه‌های درشت قابل توجه است و با افزایش ریزبندی



شکل ۱۲. همگرایی جابه جایی مرکز دال بتنی تحت بار متمرکز با تکیه گاه های گیردار

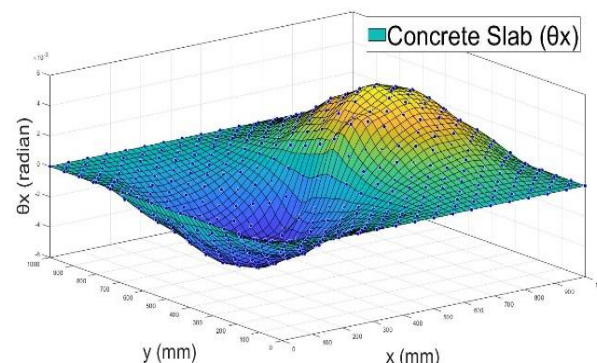
همان گونه که در (شکل ۱۲) مشاهده می شود، شبکه 2×2 بیشترین اختلاف را با حل دقیق دارد و این اختلاف با ریزتر شدن شبکه به طور قابل توجهی کاهش می یابد. از شبکه 4×4 به بعد، پاسخ عددی به مقدار تحلیلی نزدیک شده و برای شبکه های 6×6 و 8×8 تقریباً همپوشانی کامل حاصل می شود که نشان دهنده همگرایی پایدار مدل عددی و بهبود مستقیم دقت با افزایش ریزبندی است. مقادیر لنگر خمشی مرکزی دال بتنی گیردار تحت بار متمرکز برای ضخامت 100 میلی متر در (جدول ۵) ارائه شده است. با توجه به تقارن هندسی و بارگذاری، مؤلفه های لنگر خمشی در دو راستا برابر بوده و از این رو تنها یک مقدار بی بعد شده از لنگر خمشی گزارش شده است.

جدول ۴. مقادیر لنگر خمشی مرکزی برای دال بتنی تحت بار متمرکز با

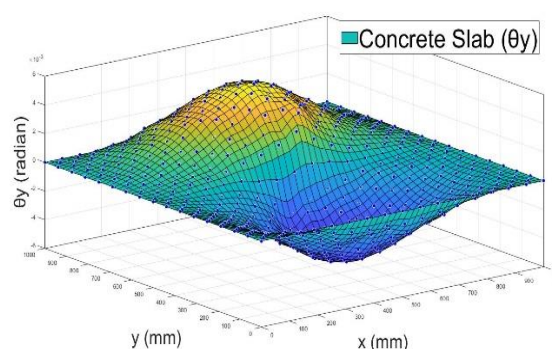
$$\left(\frac{M_{center}}{P} \right) \text{ تکیه گاه های گیردار}$$

تکیه گاه های گیردار	۸×۸	۶×۶	۴×۴	۲×۲	h/a	a	h	تکیه گاه های گیردار
حل دقیق	۰/۰۵۳۶	۰/۰۴۲۴	۰/۰۳۹۴	۰/۰۲۷۹	۰/۰۲۳۴	۰/۱	۱۰۰۰	۱
درصد اختلاف	٪۰	-۲۰/٪۷۲	-۲۶/٪۴۲	-۴۷/٪۸۶	-۵۶/٪۲۵			

نتایج جدول بالا نشان می دهد که مقدار لنگر خمشی مرکزی دال به ریزبندی شبکه وابستگی قابل توجهی دارد و شبکه های درشت دقت



شکل ۱۰. دوران دال بتنی حول محور X تحت بار متمرکز با تکیه گاه های گیردار



شکل ۱۱. دوران دال بتنی حول محور Y تحت بار متمرکز با تکیه گاه های گیردار

در نمودارهای دوران حول محورهای X و Y، مقدار دوران در لبه ها صفر است که این موضوع تطابق کامل با شرایط مرزی گیردار را نشان می دهد. تقارن هندسی دوران نیز ناشی از بارگذاری مرکزی و یکدست بودن سختی خمشی دال است. بیشترین مقدار دوران در ناحیه ی مرکزی مشاهده شده و با فاصله گرفتن از مرکز به طور یکنواخت کاهش می یابد؛ الگویی که با پیش بینی های تئوری کاملاً منطبق است. این نتایج بیانگر دقت مدل عددی در بازتولید توزیع تغییرمکان و دوران در دال های گیردار بوده و نشان می دهد که تحلیل انجام شده از پایداری و اعتبار کافی برای کاربردهای مهندسی برخوردار است. (شکل ۱۲) همگرایی جابه جایی مرکز دال بتنی را تحت بار متمرکز و تکیه گاه گیردار با ضخامت 100 میلی متر نشان می دهد.

برای ارزیابی دقت مدل عددی، مقدار جابه‌جایی محاسبه‌شده با جزء پیشنهادی ME30 در شبکه‌بندی 8×8 برابر با $2/111$ میلی‌متر به‌دست آمده است که بیانگر دقت حدود $95/97\%$ و خطایی حدود 4% نسبت به حل تحلیلی می‌باشد. این نتیجه نشان‌دهنده انطباق مناسب روش پیشنهادی با پاسخ تحلیلی است. برای مقایسه گسترده‌تر، نتایج حاصل از جزء پیشنهادی ME30 با اجزای شناخته‌شده DKQ، MZC، REC4، ACM و MKQ12 در سطوح مختلف شبکه‌بندی مقایسه شده است. همان‌گونه که در جدول (۶) مشاهده می‌شود، با افزایش ریزبندی شبکه، مقدار جابه‌جایی مرکز دال محاسبه‌شده توسط ME30 به‌صورت یکنواخت به مقدار حل دقیق نزدیک می‌شود و روند همگرایی پایدار و منظمی از خود نشان می‌دهد. این رفتار بیانگر توانایی مناسب جزء پیشنهادی در بازتولید میدان خیز دال‌های بتنی مربعی تحت بار متمرکز است.

جدول ۵. مقایسه جابه‌جایی مرکز دال بتنی تحت بار متمرکز و تکیه‌گاه‌های گیردار با تحقیق سایر پژوهشگران $(W_c / (Pa^2 / 100D))$

ME30	MKQ12 [34]	ACM [33]	REC4 [32]	MZC [31]	DKQ [30]	میانگین	ت.ع
۰/۳۰۶۰	۰/۵۰۹۶	۰/۶۱۳۵	۰/۶۱۳۴	۰/۶۱۳۴	۰/۶۴۱۰	2×2	۱
۰/۴۸۳۸	۰/۵۴۵۷	۰/۵۸۰۳	۰/۵۸۰۸	۰/۵۸۰۳	۰/۵۸۹۵	4×4	۲
۰/۵۳۷۴	۰/۵۵۷۰	۰/۵۶۷۲	۰/۵۷۱۰	۰/۵۶۷۲	۰/۵۷۵۷	8×8	۳
۰/۵۶۱۲						حل دقیق	

۴-۶. تحلیل دال بتنی مستطیلی تحت بار متمرکز با تکیه‌گاه‌های گیردار در این مثال به بررسی و تحلیل دال بتنی مستطیلی با مقاومت فشاری مشخصه بتن برابر $f'_c = 35 \text{ MPa}$ ، ابعاد $a \times b = 1000 \text{ mm} \times 2000 \text{ mm}$ ، ضریب کشسانی $E = 28 \times 10^3 \text{ MPa}$ و ضریب پواسون $\nu = 0.2$ تحت بار متمرکز $P = -10^6 \text{ N}$ پرداخته می‌شود. در (شکل ۱۳) ابعاد دال بتنی مستطیلی ارائه شده است. نتایج جابه‌جایی در مرکز دال بتنی مستطیلی در (جدول ۷) آمده است.

پایینی ارائه می‌دهند. با افزایش تعداد تقسیمات، حل عددی به‌صورت یکنواخت به حل تحلیلی نزدیک می‌شود و این همگرایی در شبکه‌های 6×6 و 8×8 کاملاً مشهود است. این رفتار بیانگر وجود گرادین‌های شدید لنگر خمشی در ناحیه مرکزی دال و نیاز به گسسته‌سازی دقیق‌تر برای بازنمایی صحیح میدان تنش خمشی است. بزرگ‌تر بودن برخی مقادیر عددی نسبت به حل تحلیلی در ضخامت‌های بالاتر به محدودیت‌های تئوری‌های کلاسیک بدون درنظرگرفتن تغییر شکل برشی بازمی‌گردد. در مجموع، نتایج (جدول ۵) دقت و پایداری مناسب مدل عددی مبتنی بر تئوری میندلین-رایسنر را برای تحلیل لنگر خمشی دال‌های گیردار، به‌ویژه در ضخامت‌های متوسط و زیاد، تأیید می‌کند.

۴-۵. مقایسه حل عددی دال بتنی مربعی تحت بار متمرکز با نتایج سایر پژوهشگران

برای مقایسه حل عددی، مسئله دال بتنی مربعی بررسی می‌شود که حل دقیق آن توسط رابطه زیر بیان می‌شود [۲۸]:

$$w = 0.0056 \cdot \frac{Pa^2}{D} \quad (26)$$

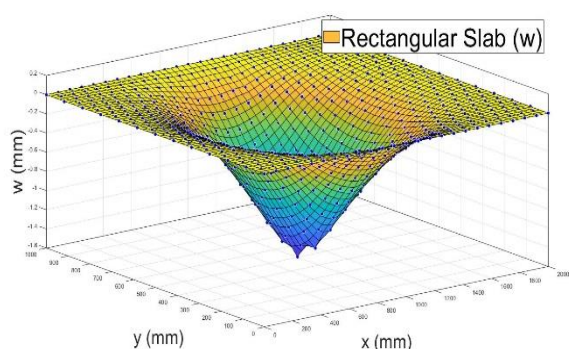
در رابطه فوق ماتریس D بیانگر مشخصات مصالح (صلبیت خمشی صفحه) است که توسط رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (27)$$

برای مسئله دال بتنی از مقاومت فشاری $f'_c = 35 \text{ N/mm}^2$ ، مقدار مدول یانگ $E = 28000 \text{ N/mm}^2$ ، بار متمرکز $P = -10^6 \text{ N}$ ، ابعاد صفحه مربعی $a = 1000 \text{ mm}$ ، ضریب پواسون $\nu = 0.2$ و مقدار ضخامت دال بتنی $h = 100 \text{ mm}$ استفاده شده است.

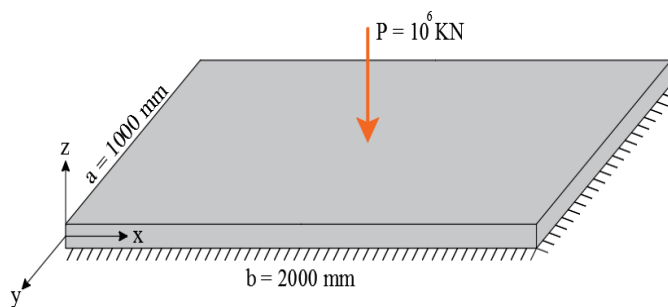
$$w = 0.0056 \cdot \frac{-10^6 \text{ N} \cdot (1000 \text{ mm})^2}{28000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot (100 \text{ mm})^3} = -2.304 \text{ mm} \quad (28)$$

نبود روند یکنواخت در برخی شبکه‌ها نیز ناشی از محدودیت‌های حل دقیق کلاسیک با در نظر نگرفتن تغییرشکل برشی است. در مجموع، نتایج (جدول ۵) بیانگر آن است که روش عددی مورد استفاده در تحلیل دال‌های مستطیلی گیردار، با ریزبندی مناسب، قادر است میدان خمش را با دقت و همگرایی قابل اتکا، به‌ویژه برای ضخامت‌های متوسط و زیاد بازتولید کند. (شکل ۱۴) جابه‌جایی را برای ضخامت ۱۲۰ میلی‌متر نشان می‌دهند.



شکل ۱۴. جابه‌جایی دال بتنی مستطیلی تحت بار متمرکز با تکیه‌گاه‌های گیردار

نظر به شکل بالا، تمرکز تغییرمکان در مرکز و تفاوت شیب خمش در دو راستا بیانگر اثر مستقیم نسبت طول به عرض دال بر توزیع سختی خمشی است. کاهش سریع خیز در بعد کوتاه و کاهش ملایم‌تر در بعد طویل نشان می‌دهد که مدل عددی توانسته است رفتار غیریکنواخت دال مستطیلی را بدون تحمیل تقارن بازتولید کند. یکنواختی سطح نزدیک تکیه‌گاه‌ها نیز گواهی بر اعمال صحیح تکیه‌گاه گیردار در لبه‌ها است. این الگو صحت مدل عددی را در نمایش مسیرهای واقعی انتقال بار و بازتولید میدان خمش دال مستطیلی تأیید می‌کند. (شکل ۱۵) مقایسه‌ی جابه‌جایی دال بتنی مستطیلی با شبکه‌بندی‌های مختلف و حل تئوری کلاسیک را نشان می‌دهد.



شکل ۱۳. مشخصات هندسی و بارگذاری دال بتنی مستطیلی

نتایج (جدول ۷) رفتار خمش دال بتنی مستطیلی گیردار تحت بار متمرکز را در دو ضخامت مختلف نشان می‌دهد. برای ضخامت ۱۰۰ میلی‌متر، اختلاف میان حل عددی و مقدار تحلیلی در شبکه‌های درشت (۲×۴) نسبتاً زیاد است، اما با افزایش شبکه‌های ریزتر، خطا به‌صورت منظم کاهش یافته و در شبکه ۶×۱۲ مقدار قابل قبولی به‌دست می‌آید.

جدول ۶. تحلیل دال بتنی مستطیلی تحت بار متمرکز با تکیه‌گاه‌های گیردار

$\left(\frac{W_{max}}{Pa^2/D}\right)$							
ردیف	a	b	h	h/a	۲×۴	۴×۸	۶×۱۲
۱	۱۰۰۰	۲۰۰۰	۱۰۰	۰/۱	۰/۰۰۳	۰/۰۰۶۴۲	۰/۰۰۶۱۸
	درصد اختلاف				-۵۸/۳۵	-۱۷/۰۲	-۱۴/۳۴
۲	۱۰۰۰	۲۰۰۰	۱۲۰	۰/۱۲	۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۶۵۷	۰/۰۰۶۷
	درصد اختلاف				-۵۱/۴۳	-۸/۹۶	-۷/۲۰
حل دقیق (بدون اثر تغییرشکل برشی) [۲۸]					۰/۰۰۷۲۲		

این روند نشان می‌دهد که دال‌های مستطیلی به دلیل نسبت طول به عرض متفاوت، میدان خمش ناهمگن‌تری نسبت به دال‌های مربعی ایجاد کرده و حساسیت بیشتری به گسسته‌سازی دارند. با افزایش ضخامت به ۱۲۰ میلی‌متر، سختی خمشی دال افزایش یافته و اختلاف‌ها در شبکه‌های میانی و ریز کاهش قابل توجهی پیدا می‌کند، به طوری که شبکه ۶×۱۲ بیشترین انطباق را با حل تحلیلی نشان می‌دهد.

نمودار بالا نشان می‌دهد که شبکه‌بندی 2×4 دقت پایینی دارد و اختلاف قابل توجهی با حل دقیق ایجاد می‌کند. با افزایش تقسیمات به 4×8 و 6×12 پاسخ عددی به مقدار مرجع نزدیک شده و خطا به‌طور چشمگیری کاهش می‌یابد. این روند بیانگر آن است که برای دال مستطیلی گیردار، ریزبندی شبکه نقش تعیین‌کننده‌ای در بازتولید صحیح خیز مرکزی دارد.

۷-۴. تحلیل دال بتنی خیلی ضخیم تحت بار متمرکز با تکیه‌گاه‌های گیردار

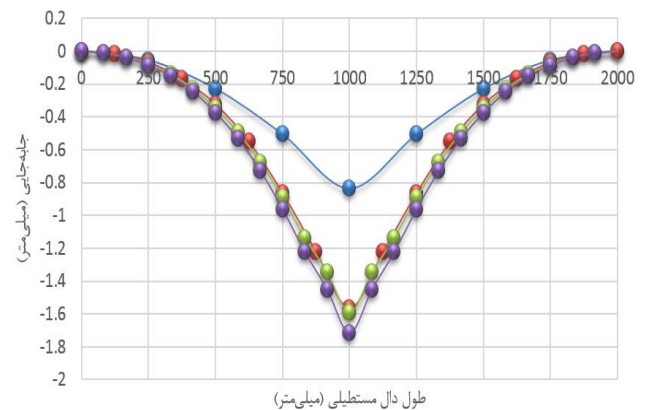
در این مثال به بررسی و تحلیل دال بتنی خیلی ضخیم مربعی با مقاومت فشاری مشخصه بتن برابر با $f'_c = 35 \text{ MPa}$ ، با بعد $a = 2500 \text{ mm}$ ، ضریب کشسانی $E = 28 \times 10^3 \text{ MPa}$ ، ضریب پواسون $\nu = 0.2$ و تحت بار متمرکز $P = -10^6 \text{ N}$ پرداخته می‌شود. محاسبه نتایج این حل عددی برای جابه‌جایی مرکز دال بتنی در (جدول ۷) ارائه شده است.

جدول ۷. جابه‌جایی مرکز دال بتنی خیلی ضخیم تحت بار متمرکز با لبه‌های

$$\left(\frac{W_{\max}}{Pa^2/D} \right) \text{ گیردار}$$

تک	h	a	h/a	۲×۲	۴×۴	۶×۶	۸×۸
۱	۳۰۰	۲۵۰۰	۰/۱۲	۰/۰۰۳۶۵	۰/۰۰۵۳۶	۰/۰۰۵۵۶	۰/۰۰۵۹
				درصد اختلاف [۲۸]			
				-۳۴/۰۶۶	-۴/۰۲۷	-۰/۰۵۶	۵/۰۳۶
۲	۶۰۰	۲۵۰۰	۰/۲۴	۰/۰۰۷۳۲	۰/۰۰۹۴۴	۰/۰۰۹۶	۰/۰۱۰۴
				درصد اختلاف [۲۸]			
				۳۰/۰۷۳	۶۸/۰۶۶	۷۱/۰۵۱	۸۷/۰۲۵
حل دقیق (بدون اثر تغییر شکل برشی) [۲۸]							
۰/۰۰۵۶							

برای دال بسیار ضخیم با ضخامت ۳۰۰ میلی‌متر، اختلاف نتایج در شبکه‌بندی‌ها از $34/66\%$ در 2×2 به مقدار کم $0/56\%$ در 6×6 کاهش یافته و روند همگرایی مناسب است. در ضخامت ۶۰۰ میلی‌متر، اختلاف‌ها به‌طور قابل توجهی افزایش یافته و از $30/73\%$ تا $87/25\%$ متغیر شده‌اند. علت افزایش خطا، نسبت بزرگ ضخامت به



شکل ۱۵. همگرایی جابه‌جایی دال بتنی مستطیلی تحت بار متمرکز با تکیه‌گاه‌های گیردار و شبکه‌بندی‌های مختلف

با افزایش تعداد تقسیمات، پاسخ عددی به‌صورت پیوسته به مقدار مرجع نزدیک می‌شود و اختلاف قابل توجه شبکه‌های درشت به‌سرعت کاهش می‌یابد. هندسه مستطیلی دال سبب شده است که حساسیت حل عددی در راستای طول و عرض متفاوت باشد و این موضوع در تفاوت نرخ همگرایی شبکه‌های 2×4 ، 4×8 و 6×12 بازتاب یافته است. رفتار نمودار نشان می‌دهد که مدل عددی در شبکه‌های ریز قادر است میدان خمش دال مستطیلی را با دقت بالا بازتولید کند و افزایش تعداد اجزا، اثرات ناهمگنی سختی خمشی ناشی از نسبت طول به عرض را به‌درستی پوشش می‌دهد. (شکل ۱۶) همگرایی جابه‌جایی مرکز دال بتنی مستطیلی را نشان می‌دهد.



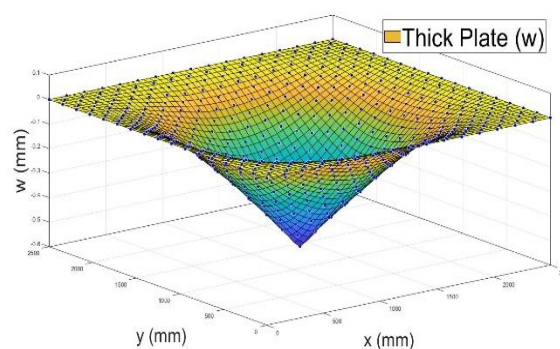
شکل ۱۶. همگرایی جابه‌جایی مرکز دال بتنی مستطیلی تحت بار متمرکز با تکیه‌گاه‌های گیردار

طوری که در شکل مشاهده می شود در شبکه بندی 8×8 حل عددی از حل تحلیلی عبور کرده است، زیرا حل تحلیلی مورد استفاده در این پژوهش مبتنی بر تئوری کلاسیکی Kirchhoff بوده و اثر تغییر شکل برشی را در نظر نمی گیرد. در مقابل، فرمول بندی عددی حاضر بر اساس تئوری Mindlin-Reissner توسعه یافته است که سهم تغییر شکل برشی را لحاظ می کند. به همین دلیل، در صفحات با ضخامت متوسط و زیاد، مقادیر خیز و پاسخ های عددی می تواند بزرگ تر از مقادیر حاصل از حل کلاسیک باشند. این رفتار در مطالعات تحلیلی و عددی پیشین نیز گزارش شده است [۲۹].

۵. نتیجه گیری

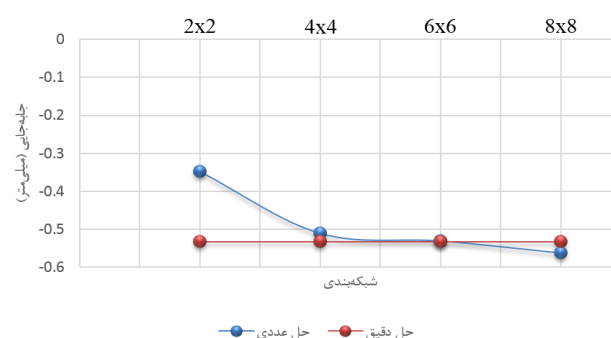
جزء محدود پیشنهادی ME30 در تحلیل صفحات و دال های خمشی تحت بار متمرکز نشان داد که در بازه نسبت ضخامت به طول حدود $0.08 \leq h/a \leq 0.12$ ، دقت و همگرایی پایدار و قابل اعتمادی ارائه می دهد. در این بازه، پاسخ های عددی تطابق مناسبی با حل های تحلیلی و فرمول بندی های معتبر موجود در ادبیات داشته و بیشترین کارایی مدل مشاهده می شود. با افزایش نسبت ضخامت بر طول و ورود به ناحیه دال های بسیار ضخیم، اختلاف میان پاسخ عددی و حل های تحلیلی کلاسیک افزایش می یابد که این امر ناشی از محدودیت ذاتی حل های مرجع فاقد تغییر شکل برشی بوده و به عنوان ضعف مدل عددی تلقی نمی شود. نتایج همگرایی نشان می دهد که اگرچه جزء ME30 دارای ۳۰ درجه آزادی در هر المان است و در ظاهر هزینه محاسباتی بیشتری نسبت به المان های مرتبه پایین تر دارد، این افزایش درجات آزادی با بهبود رفتار همگرایی و کاهش نیاز به شبکه بندی بسیار ریز جبران می شود. به گونه ای که در بسیاری از مسائل بررسی شده، دستیابی به دقت قابل قبول در شبکه های 6×6 و 8×8 امکان پذیر بوده است. از این رو، دقت افزوده مدل ME30 صرفاً ناشی از افزایش مرتبه یا تعداد درجات آزادی نبوده، بلکه حاصل فرمول بندی پیشنهادی و توانایی آن در بازنمایی همزمان رفتار خمشی و تغییر شکل های برشی است. در مجموع، می توان نتیجه گرفت که جزء پیشنهادی ME30 یک ابزار عددی قابل اتکا برای تحلیل صفحات نازک و دال های با ضخامت متوسط تحت بار متمرکز است

طول و رفتار شبه صلب دال است که با فرضیات خمشی سازگار نیست و جزء صفحه خمشی انعطاف مازاد ایجاد می کند. نتایج بیانگر کارایی مدل برای دال های ضخیم و محدودیت آن برای دال های خیلی ضخیم است. مقدار جابه جایی در (شکل ۱۷) برای ضخامت ۳۰۰ میلی متر رسم شده است.



شکل ۱۷. جابه جایی دال بتنی خیلی ضخیم تحت بار متمرکز با تکیه گاه های گیردار

در (شکل ۱۷) جابه جایی دال بتنی خیلی ضخیم تحت بار متمرکز نشان داده شده است. شکستگی موضعی در مرکز، بازتاب اعمال بار نقطه ای است و رفتار سطح تغییر مکان نیز مطابق انتظار دال با تکیه گاه گیردار ظاهر شده است. دامنه خیز بین مقادیر صفر و -0.056 میلی متر قرار دارد که نشان دهنده سختی بسیار بالای دال و محدود بودن تغییر شکل ها است. توزیع خیز یکنواخت و عدم بروز ناپیوستگی در مرزها صحت اعمال شرایط گیردار را تأیید می کند. (شکل ۱۸) همگرایی جابه جایی مرکز دال بتنی خیلی ضخیم تحت بار متمرکز با تکیه گاه های گیردار را نشان می دهد.



شکل ۱۸. همگرایی جابه جایی مرکز دال بتنی خیلی ضخیم تحت بار متمرکز با تکیه گاه های گیردار

- [9] Belounar, A., Benmebarek, S., and Belounar, L. (2020). "Strain-based triangular finite element for plate bending analysis." *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 27, no. 8, pp. 620–632.
<https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1488310>
- [10] Lee, K. H., Lim, G. T., and Wang, C. (2002). "Thick Lévy plates revisited." *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, pp. 127–144.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00205-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00205-0)
- [11] Nguyen-Xuan, H. (2017). "A polygonal finite element method for plate analysis." *Computers & Structures*, vol. 188, pp. 45–62.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.04.002>
- [12] Noor, A. K., and Burton, W. S. (1989). "Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates." *Applied Mechanics Reviews*, vol. 42, p. 1.
<https://doi.org/10.1115/1.3152418>
- [13] Hassan, K., Tawfik, M., and Yehia, E. M. (2020). "Finite elements for the one variable version of Mindlin–Reissner plate." *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 17, p. 299.
<https://doi.org/10.1590/1679-78256170>
- [14] Maknun, I. J., Katili, I., Ibrahimbegovic, A., and Katili, A. M. (2020). "A new triangular shell element for composites accounting for shear deformation." *Composite Structures*, vol. 243, p. 112214.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112214>
- [15] Liu, I.-W., and Lin, C.-C. (1994). "A conforming quadrilateral plate bending element with shear deformations." *Proceedings of the 35th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, AIAA*. <https://doi.org/10.2514/6.1994-1332>
- [16] Rajaneesh, A., Patel, H. G., and Shimpi, R. P. (2021). "Finite element bending and free vibration analysis of layered plates using new first-order shear deformation theory." *Composite Structures*, vol. 257, p. 113143.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113143>
- [17] Ghugal, Y. M., and Shimpi, R. P. (2002). "A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates." *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 21, no. 9, pp. 775–813.
<https://doi.org/10.1177/073168402128988481>

که تعادل مناسبی میان دقت، پایداری عددی و هزینه محاسباتی برقرار می‌سازد.

References

- [1] Reissner, E. (1945). "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates." *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, pp. A68–A77. <https://doi.org/10.1115/1.4009435>
- [2] Popplewell, N., and McDonald, D. (1971). "Conforming rectangular and triangular plate-bending elements." *Journal of Sound and Vibration*, vol. 19, no. 3, pp. 333–347.
[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(71\)90693-6](https://doi.org/10.1016/0022-460X(71)90693-6)
- [3] Reddy, J. N. (1990). "A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness." *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 25, no. 6, pp. 677–686.
[https://doi.org/10.1016/0020-7462\(90\)90006-U](https://doi.org/10.1016/0020-7462(90)90006-U)
- [4] Leissa, A. W. (1973). "The free vibration of rectangular plates." *Journal of Sound and Vibration*, vol. 31, no. 3, pp. 257–293.
[https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(73\)80371-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80371-2)
- [5] Nguyen-Thoi, T., Phung-Van, P., Nguyen-Xuan, H., and Thai-Hoang, C. (2012). "A cell-based smoothed discrete shear gap method using triangular elements for static and free vibration analyses of Reissner–Mindlin plates." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, no. 7, pp. 705–741.
<https://doi.org/10.1002/nme.4289>
- [6] Gou, Y., Cai, Y., and Zhu, H. (2018). "A simple high-order shear deformation triangular plate element with incompatible polynomial approximation." *Applied Sciences*, vol. 8, p. 975.
<https://doi.org/10.3390/app8060975>
- [7] Idlbi, A., Karama, M., and Touratier, M. (1997). "Comparison of various laminated plate theories." *Composite Structures*, vol. 37, no. 2, pp. 173–184.
[https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(97\)80010-4](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(97)80010-4)
- [8] Kiendl, J., Auricchio, F., Veiga, L., Lovadina, C., and Reali, A. (2015). "Isogeometric collocation methods for the Reissner–Mindlin plate problem." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 284, pp. 489–507.
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.09.011>

- theory with simple explicit expression." *Mathematics*, vol. 9, no. 11, p. 1181. <https://doi.org/10.3390/math9111181>
- [28] Timoshenko, S. P., and Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*, vol. 2. New York: McGraw-Hill.
- [29] Ozkul, T. A., and Ture, U. (2004). "The transition from thin plates to moderately thick plates by using finite element analysis and the shear locking problem." *Thin-Walled Structures*, vol. 42, pp. 1405–1430. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2004.05.003>
- [30] Batoz, J.-L., and Tahar, M. (1982). "Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element (DKQ)." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, no. 11, pp. 1655–1677.
- [31] Batoz, J. L., Bathe, K. J., and Ho, L. W. (1980). "A study of three-node triangular plate bending elements." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, no. 12, pp. 1771–1812. <https://doi.org/10.1002/nme.16201512>
- [32] Bhavikatti, S. (2005). *Finite Element Analysis*. New Delhi: New Age International.
- [33] Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K. (1964). "The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs." *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. 28, no. 4, pp. 471–488. <https://doi.org/10.1680/iicep.1964.10014>
- [34] Melosh, R. J. (1963). "Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method." *AIAA Journal*, vol. 1, no. 7, pp. 1631–1637. <https://doi.org/10.2514/3.1869>
- [35] Karkon, M., and Rezaiee-Pajand, M. (2017). "A quadrilateral plate bending element based on deformation modes." *Applied Mathematical Modelling*, vol. 41, pp. 79–95. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.09.007>
- [18] Thai, H.-T., and Choi, D.-H. (2013). "A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates." *Composite Structures*, vol. 101, pp. 332–340. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.02.019>
- [19] Hassan, K., Guirguis, S., and El-Hamouly, H. M. (2017). "Bergan–Wang solution of clamped moderately thick rectangular plates." *Applied Mathematics*, vol. 8, no. 6. <https://doi.org/10.17265/2159-5291/2017.06.003>
- [20] Chinosi, C., and Lovadina, C. (1995). "Numerical analysis of some mixed finite element methods for Reissner–Mindlin plates." *Computational Mechanics*, vol. 16, no. 1, pp. 36–44. <https://doi.org/10.1007/BF00369883>
- [21] Han, J.-G., Ren, W.-X., and Huang, Y. (2007). "A wavelet-based stochastic finite element method of thin plate bending." *Applied Mathematical Modelling*, vol. 31, no. 2, pp. 181–193. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.08.020>
- [22] Ahmed, K. M. (1971). "Static and dynamic analysis of sandwich structures by the method of finite elements." *Journal of Sound and Vibration*, vol. 18, no. 1, pp. 75–91. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(71\)90632-8](https://doi.org/10.1016/0022-460X(71)90632-8)
- [23] Demiray, S., Becker, W., and Hohe, J. (2004). "A triangular von Kármán type finite element for sandwich plates with transversely compressible core." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, no. 23, pp. 2239–2260. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.01.023>
- [24] Thai, H.-T., and Choi, D.-H. (2013). "A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates." *Composite Structures*, vol. 106, pp. 754–763. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.013>
- [25] Ha, K. H. (1990). "Finite element analysis of sandwich plates: An overview." *Computers & Structures*, vol. 37, no. 4, pp. 397–403. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(90\)90028-Z](https://doi.org/10.1016/0045-7949(90)90028-Z)
- [26] Chernukha, O., Bilushchak, Y., Shakhovska, N., and Kulhánek, R. J. M. (2021). "A numerical method for computing double integrals with variable upper limits." *Mathematics*, vol. 10, no. 1, pp. 1–26. <https://doi.org/10.3390/math10010108>
- [27] Tian, L., and Cheng, Z. (2021). "A triangular plate bending element based on discrete Kirchhoff